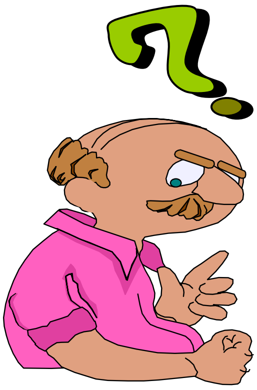


PROBLEMAS

DE RAZONAMIENTO LÓGICO

Respuestas y Soluciones

Autor: Ms.C. *MAURICIO AMAT ABREU*

LAS TUNAS

2004

Si nos quitan la
Posibilidad de equivocarnos,
Nos quitan el placer de acertar.

ALDO CAMAROTA.

Introducción.

Es incuestionable que los problemas de razonamiento lógico desarrollan la capacidad creativa de la persona, su manera lógica de pensar, les enseña a plantear problemas importantes y hallar las respuestas de los mismos.

Las matemáticas no deben aprenderse de memoria, no deben tanto la escuela, como la familia empeñarse en enseñarle a niños y jóvenes el estudio de tablas, fórmulas o reglas de forma mecánica o inconsciente, sino que, ante todo, debe acostumbrársele a pensar con placer y razonamiento en un proceso consciente y consecuente en cuanto al pensamiento lógico. Lo demás se añadirá con el tiempo, no es conveniente "molestar" a alguien con cálculos y ejercicios mecánicos muy largos, tediosos y aburridos; pues cuando le sean necesarios en la vida, él lo hará por sí solo, además de que para ello existen distintas herramientas como la calculadora, computadora, tablas y otros dispositivos.

Es por ello que nos parece que los maestros deben impartir las matemáticas de una forma agradable y amena. Como decía Pascal: "Las matemáticas son una disciplina tan seria, que conviene no perder la ocasión de hacerlas un poco entretenidas". Por eso, para evitar que la exposición de las matemáticas se haga un poco "seca" o a los estudiantes les parezca demasiado aburrida se le debe dar una brillante envoltura de entretenimiento para que se sientan atraídos y de paso comiencen a asimilar los contenidos matemáticos que hasta entonces les parecían "amargos".

En el presente libro se exponen las ***soluciones y respuestas*** de "***Problemas de Razonamiento Lógico***" en el cual esbozamos algunas ideas, criterios o pautas para resolver los problemas. Esperamos que estas técnicas de trabajo les sirvan de aplicación a los variados problemas que se enfrentan en la escuela, aunque es de esperar que no agotamos todas las vías que te puedan guiar a la solución de otros problemas que te hallarás en el transcurso de la vida cotidiana y profesional.

Es por ello que te sugerimos que tengas presente que al abordar un problema, aún siguiendo las normas e ideas sugeridas y no encuentres como enfocarlo o no puedas hallar de inmediato la solución, no debes desalentarte, ni considerarte fracasado; en ocasiones quizás sea conveniente darle un pequeño descanso a nuestra imaginación y luego con la mente más fresca reconsiderar el problema. No es aconsejable que vayamos inmediatamente a ver cuál es la solución, quizás ese sea el camino más fácil pero estaríamos desaprovechando la oportunidad de adiestrar nuestro pensamiento para la solución de nuevos problemas.

Si después de un análisis del problema no encuentras una vía de solución, solo en última instancia puedes buscar las soluciones que aquí se exponen y en estas circunstancias debes realizar un cuidadoso y detenido estudio sobre como alcanzar ésta y puedas fijar estas ideas para la solución de otros problemas y al final puedas realizar comparaciones necesarias.

Les pedimos que cualquier sugerencia que quieran darnos con mucho gusto la recibiremos y la tendremos en consideración para perfeccionar nuestro trabajo.

EL AUTOR.

Respuestas y soluciones.

Un razonamiento...

1. De ningún color, los caballos no tienen ceja.
2. Uno solo, el 9.
3. Muy fácil, en números romanos al 19 (XIX) le quitas 1 (I) y nos queda 20 (XX).
4. Porque se miraron uno al otro. El que tiene la cara limpia, ve al otro con la cara tiznada y se lava la cara, pero el que tiene la cara tiznada ve al otro con la cara limpia y no se lava la cara.
5. Hay que considerar que el tamaño del hoyo es sumamente pequeño para que puedan trabajar tantos hombres (60) simultáneamente; muchas personas responden incorrectamente, sin hacer el análisis anterior, que necesitan un minuto. Realmente esto no es posible.
6. Generalmente se comete el error de tratar de calcular el volumen del ortoedro descrito con las dimensiones que se dan sin razonar correctamente que si es un hoyo no puede tener tierra.
7. Dos picos y cuatro patas; recuerde que son solo los que tengo dentro del cajón.
8. El pollo: el huevo antes de nacer y después de muerto, a gusto del consumidor.
9. El mosquito, después de picarnos lleva nuestra sangre, pero si se pone a nuestro alcance lo matamos inmediatamente.
10. El papalote, siempre lo controlamos por el cordel.
11. Muy fácil, la escalera estaba tirada sobre el suelo, o si estaba parada se cayó desde los primeros peldaños.
12. 50 años.
13. 6 outs, tres por cada equipo.
14. De morado (atrasado).
15. Ver un semejante, alguien que tenga su misma condición.
16. Ninguno. Según la Biblia, el pasaje de salvar a los animales dentro del arca por causa del diluvio no se le atribuye a Moisés sino a Noé.
17. 12 estampillas. Hay doce estampillas en una docena.
18. La bola de billar.
19. El zapato.
20. Las tijeras.
21. En la boca, en la encía.
22. Es que tiene la nariz en el medio.
23. Las cinco, porque se apagaron cuatro pero quedan las cinco, una encendida y las otras cuatro apagadas; ellas no se retiraron.
24. Dos manzanas, tomaste dos, ¿recuerdas?
25. Muy sabroso, el perro caliente.
26. Mojado.
27. El cigarro y la cigarra, el cigarro quema y no canta y la cigarra canta y no quema.
28. La cabeza de ajo.
29. El coco.
30. Cuando el testador es también notario.
31. Lógicamente le costará más barato invitar a dos amigos a ver la misma película juntos, pues en este caso solo debe pagar por tres personas, mientras que si invita a un amigo dos veces al cine tiene que pagar por cuatro personas: dos veces por cada uno.
32. Durmió una hora menos de lo previsto.
33. Sí es posible, pues el cirujano es su madre.
34. Simplemente, que esté cerrada la puerta principal.
35. La planta de los pies.
36. En reiteradas ocasiones se comete el error de considerar que es el día 14, pero hay que tener en cuenta que los días no son los que se duplican, sino que lo que se duplica es su tamaño cada día, de aquí, si el día 28 cubre toda la laguna es porque el día anterior, el día 27, cubría la mitad de la laguna.
37. El bienvestido (júpito), que suele sembrarse en las cercas de las fincas y potreros.
38. No, no, no se deje confundir debajo queda la mano.
39. Muy fácil el número 123.

40. El día de ayer (un día que haya pasado).
41. Dos minutos, uno para pasar la máquina de un lado a otro y otro para pasar el cabú (final del tren).
42. El metro contador.
43. La maquinaria del reloj.
44. El juego de cartas.
45. El piojo.
46. Posarse.
47. Ni se les ocurra pensar en que la respuesta es cojear, con una sola pata lo que puede hacer es dar saltitos para desplazarse.
48. Simplemente despertarse, pues estaba soñando
49. Un tropezón.
50. Cinco pesetas y un hueco.
51. La que nos dan.
52. El entierro.
53. Dándoselo a otra persona para que lo rompa.
54. No. Si usted rebasa al segundo lugar, usted ocupa el segundo lugar y el que iba en segundo ocupa el tercero, pero usted no rebasó al que iba en primer lugar.
55. Esto no es como usted piensa, pues para pasar a una persona usted debe ir detrás de ella y entonces no podría ir en último lugar. Luego, usted no puede pasarle al último lugar.
56. El agente especial comienza a caminar hasta el guardia y cuando esta próximo a los 20 segundo se vira y comienza a caminar en dirección hacia donde él había salido, al guardia verlo caminando hacia esa dirección lo obligará a volverse y podrá pasar sin dificultad.
57. Una de ellas no es de 2 centavos, pues es de 20 centavos, pero la otra si es de 2 centavos.
58. Muy elemental, pues la mitad de la cuarta parte de 8 es uno: la cuarta parte de 8 es 2 y la mitad de 2 es 1.
59. El doble de la mitad de un número es el propio número, por lo tanto el doble de la mitad de 4 es 4.
60. Darse cuenta que si cada naranja y media valen centavo y medio es porque cada naranja vale un centavo, luego cinco naranjas valen cinco centavos.
61. Muy fácil, 11+1=12
62. Ahora tiene cinco esquinas.
63. Donde la tiene todo el mundo, en la muñeca.
64. No cae, se forma del vapor húmedo del ambiente.
65. El gallo, pues nadie dice arroz con gallo, sino arroz con pollo.
66. De ninguna forma, los muertos no hablan.
67. El pescador, que tiene que esperar que el pez pique para poder comer pescado.
68. Respirar.
69. En la tierra.
70. En febrero, que tiene menos días, porque los monos hacen muecas todos los días.
71. Porque del suelo no puede pasar.
72. Nada, cada uno se fue a trabajar: él era sepulturero y ella enfermera.
73. En el lado de afuera.
74. Cristóbal Colón, pues vino gracias al aire que sopló en las velas de sus naves.
75. En el hospital de atención a personas con trastornos mentales, pues ambos íbamos locos: yo loco, loco y ella loquita.
76. El paciente.
77. Por encima del agua.
78. El sirviente, porque el rey manda una vez y el sirviente manda muchas veces pero nadie le hace caso.
79. Recuerde que la semana tiene 7 días, en 42 semanas tenemos $42 \cdot 7 = 294$ días.
80. La lanzaría hacia arriba, se detendrá y regresará hacia nosotros.
81. En mis muslos.
82. El codo izquierdo.
83. Remedios.
84. En el medio de Cuba (cinco centavos): por un lado una estrella y por el otro el escudo.
85. Los cinco dedos.
86. Ninguno, los perros no hablan.

87. El de la gata, las mulas no paren.
88. Jamón, queso, mortadela, jamonada o lo que pueda traer un bocadito; nunca el reloj.
89. La escoba, que después de tanto uso se convierte en mocho.
90. La sartén.
91. El 500,991.
92. Porque si levanta las dos se cae.
93. En el gato.
94. A oscuras.
95. El tabaco.
96. El de ballena, pues va llena.
97. El ataúd (caja de muerto).
98. El pan.
99. Detrás del pito.
100. Del horno.
101. Los pies.
102. Respirar.
103. Ninguno, los gatos no tienen pies sino patas.
104. Cien pesos, pues cada melón vale un peso.
105. La tela de araña.
106. Su propia cara.
107. Hasta la mitad, después está saliendo.
108. Que el soldado no puede cortarse el brazo, pues le faltaba el otro.
109. La nariz.
110. La foca, porque se queda sin foco.
111. Aparentemente esto parece imposible, pero en realidad es muy fácil, pues realmente lo que sucede es que cada uno llega a una orilla, por supuesto diferentes orillas del mismo río, el que se encontraba en la orilla donde estaba el bote cruzó, al llegar a la otra orilla el que estaba ahí tomó el bote y cruza a la otra orilla sin dificultad.
112. Al salir de su casa siempre a la misma hora y llegar siempre a la misma hora al trabajo, está claro que emplea un tiempo fijo *t* para hacer el recorrido en bicicleta. Al hacer el recorrido a pie a una velocidad 2 veces menor en el mismo tiempo *t* llegará solo hasta la mitad del camino, o sea, que el momento en que lo recoge su amigo en el carro es el mismo en el que comienza el horario laboral y por tanto no importa cuánta velocidad alcance el carro para la otra mitad del camino, cualquiera que fuera siempre llegará tarde al trabajo.
113. No hay velocidad por grande que sea que pueda garantizar un promedio de 100km por hora al final del recorrido, pues el automóvil ya había consumido la hora en los primeros 50km.
114. Un automóvil.
115. Porque era ciego.
116. El de viuda.
117. El radio.
118. Cuando suena a las 12:30, a la 1:00 y a la 1:30.
119. José entró en el momento que sonaba la última campanada de las 12:00, luego sonó una vez en cada una de las siguientes horas; 12:15, 12:30, 12:45, 1:00, 1:15, 1:30 y 1:45. Este es el único intervalo donde puede ocurrir esto.
120. El maíz que después de quitarle la mazorca se llama maloja.
121. La montura.
122. Dejarla caer.
123. Que se le llena la boca de granos.
124. Una estaba frente a la otra.
125. Excepto sumándolos, de cualquier otra forma. Ejemplo: poniéndolos uno al lado del otro es 33, multiplicándolos es 9, restándolos es cero,**...**
126. Mojarse.
127. Que las páginas 51 y 52 están en una misma hoja y no se puede poner nada entre ellas.
128. Porque él no puede ponérsela.
129. Se hizo gallo.
130. Vivos, igual que en cualquier parte.
131. Con la boca.
132. La palabra.

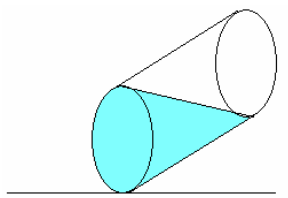
133. La oscuridad.
134. Cuidado, son 15, las diez de los dedos y las cinco de los huevos.
135. El ponche.
136. Sí, tirando tijeretazos a lo loco.
137. Con Regla en La Habana.
138. No, pues el primer día del horario de verano es de 23 horas y el primer día del horario oficial es de 25 horas.
139. El buey que es: ternero, novillo, añojo, toro y buey.
140. Un pleito.
141. De la azucarera.
142. Los que viven en los ríos, lagunas, presas y peceras.
143. Si el hombre murió de repente, pues estaba dormido ¿cómo puede saberse lo que soñaba?.
144. Ninguno, porque cada hijo tiene ya una hermana.
145. Se trata del hijo del que habla.
146. Pablo es sobrino de Pedro, porque Pedro y el padre de Pablo son hermanos.
147. Es mi padre.
148. Yo mismo.
149. Sí es posible, pues en total son 7, cuatro varones y tres hembras; cuando un varón habla tiene la misma cantidad de hermanos (3) que de hermanas (3) y cuando habla una hembra tiene el doble de hermanos (4) que de hermanas (2).
150. Usted es mi abuelo, porque el sobrino del tío de mi padre es mi padre y usted es padre de mi padre, entonces será mi abuelo.
151. Se refiere a su hermano, porque ella es hembra y es sobrina.
152. Ambos caballeros han estado casados dos veces, el primer matrimonio de uno de ellos fue con la madre de una de las señoras y por tanto es su padre, al morir su esposa (enviudar) se casa nuevamente y el segundo matrimonio fue con la otra señora, y tiene una hija con ella; de la misma forma pasa con el otro caballero. Luego ellos son los padres de las señoras, los viudos de sus madres, los padres de sus hijas y sus propios maridos.
153. De acuerdo con los planteamientos Ernesto debe ser cuarto, para que Daniel sea segundo, entonces por la primera afirmación Ángel es tercero y Braulio quinto y por tanto Carlos primero y ese es el orden de llegada.
154. 10 veces, pues entre las 10 y las 12 pasa una sola vez.
155. Aunque algunos lo ven muy fácil, es un problema en el cual habitualmente se cometen grandes errores al hacer un uso inapropiado de las palabras. Un lápiz de 6 aristas no tiene 6 caras, como realmente piensa la mayoría. Si no está afilado, tiene 8 caras: 6 caras laterales y dos de las bases más pequeñas. La costumbre de considerar en un prisma las caras laterales, olvidándose de las bases está muy extendida. Por lo tanto, el lápiz del que hablamos tiene 8 caras.
156. Porque compraba 8 elementos de la mercancía por peso y los vendía a 7 elementos por peso. Ejemplo: Compro ajíes a 8 por peso y los vendo a 7 por peso.
157. La doble blanca pues no tiene huecos.
158. El ruido.
159. Cuando cierra la boca.
160. El pocero.
161. No es de ninguna de las dos, es de carne y hueso.
162. En la última.
163. Con Güines en la Habana.
164. La de médico, porque es médico y cura.
165. En el béisbol, que se aplaude al que se roba una base.
166. El agua.
167. Un pato, pues tiene una sola pata.
168. Porque tenía sueño.
169. El aire.
170. Hacia ningún lado, el tren es eléctrico, por tanto no echa humo.
171. Sus cabezas.
172. Envejecer.
173. Ninguno, porque al cabo de pocos meses no son pollos sino gallos.
174. Sobre la planta de los pies.
175. El porvenir.

176. No montarlo.
177. Todos los que quiera, pues no se menciona que esté amarrado a un punto fijo.
178. Nunca lo haría, porque cada vuelta que él da se acerca más al árbol.
179. Ninguno, porque no se dijo que estaba lloviendo.
180. Las casas de curar tabaco.
181. El rabo.
182. En la lija, pues se rompe la cabeza del fósforo.
183. La rana.
184. El calor.
185. La cárcel.
186. Que esté muerta.
187. Abrir los ojos.
188. Madruga.
189. Usted mismo.
190. Hora de mandarlo a arreglar, pues está descompuesto.
191. En que tienen 24 horas.
192. Son 11, pues son 10 varones y una hembra.
193. La mujer.
194. Decirle que se baje de la mesa y se siente en una silla.
195. El día menos pensado.
196. El pato.
197. Porque él no fue en ese viaje y se quedó en tierra.
198. En que los dos se ponen.
199. La gotera.
200. Porque le colgaron el sombrero en el cañón del revólver.
201. Ninguno, porque en la oscuridad total no se puede ver nada.
202. Es fácil percatarse que como una docena es 12 entonces $108 \cdot 12 = 1296$, que es la cantidad de lápices que se repartieron, por lo tanto no quedó ningún lápiz por repartir.
203. Están a la misma distancia.
204. Si en tres tanques se depositan 27 litros, entonces en cada tanque se depositan 9 litros, luego en 12 tanques se depositan 108 litros de alcohol.
205. Cada camión lleva $24 \cdot 17 = 408$ botellas, por lo tanto los dos llevan $408 \cdot 2 = 816$ botellas.
206. El silencio, que es general.
207. Como todos mienten, de las dos primeras afirmaciones tenemos que Juan es quien se casa con María y de estas y la tercera se deduce que Susana se casa con Pedro y por tanto Miguel con Ana. Se pueden valer de la siguiente tabla.

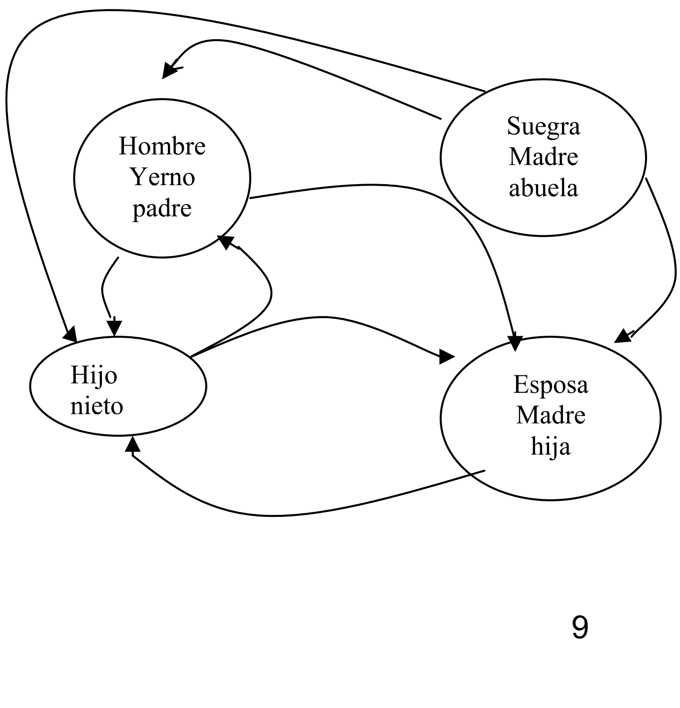
	Pedro	Juan	Miguel
María	F	V	F
Ana	F	F	V
Susana	V	F	F

208. El gato, porque es *gato*, *araña* y de noche *chiva*.
209. Ninguno, los 10 caen al suelo y los demás se asustan y se van inmediatamente.
210. En dos manos hay 10 dedos, pero no se confunda, no son 100, son solo 50 dedos en 10 manos, las manos son de 5 dedos.
211. Depende, pues si se es un ratón si es una mala suerte.
212. Echar los dientes.
213. El fósforo.
214. Todos, ninguno se lo quita para comer.
215. De agujeros.
216. Para pasar de un lado al otro del camino.
217. La autopista o la carretera central.
218. Si se lo ha puesto al revés con antelación.
219. En tres partes.
220. El menor cuadrado posible tiene que ser de 6cm de lado, luego se necesitan $3 \cdot 2 = 6$ figuras rectangulares para formar seis cuadrados.

221. Dar sombra.
222. Sacamos las panteras y corremos los demás, para ubicar la pantera en su lugar se saca el cocodrilo y se corren los demás, se ubica el cocodrilo, se corre el burro y el león, se saca el burro, se corre el león y se ubica el burro.
223. Del pelo.
224. La lengua, no piense nunca que traía la pipa.
225. Quitarse el zapato y la media si trae.
226. Contra su voluntad, pues él no quiere caerse.
227. De noche, porque se ven las estrellas, que son cuerpos que se encuentran a años luz de nosotros.
228. El primero de la fila, analiza que al último decir “*no sé*” es porque él y el del medio tienen puesto un sombrero rojo y uno negro o dos rojos (si hubieran sido negros los dos el último decía “*el mío es rojo*”). Además el del medio vio en la cabeza del primero un sombrero rojo, pues en caso contrario hubiera dicho “*mi sombrero es rojo*”, por lo que el primero de la fila dijo inmediatamente “*mi sombrero es rojo*”, que es lo que sucedía exactamente.
229. La nariz del farmacéutico.



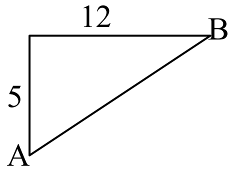
230. Se echa agua en la barrica, luego se va inclinando hasta tal punto que el nivel del agua llegue justamente al borde inferior de la boca y esta llegue exactamente hasta el punto superior de la base de la barrica, esto sucede porque si trazamos un plano que pase por los dos puntos diametralmente opuestos de los círculos superior e inferior de la barrica, este plano dividirá la barrica en dos partes iguales y por ende tienen igual volumen, luego se habrá llenado la barrica exactamente hasta la mitad.
231. Porque la encuentra abierta.
232. Que tendrá más de 500 años (nació en el siglo XV).
233. Que no le habían traído cuchara.
234. El segundo, porque camina las bocacalles además de los 1000 metros.
235. Al *VII*, de aquí quitamos el último fósforo y se obtiene $\sqrt{I}$ y es sabido que $\sqrt{I} = 1$.
236. No se deje confundir, la persona solamente duerme una hora, pues el despertador suena exactamente a la hora de haberlo conectado.
237. Deben viajar como mínimo cuatro personas: Juan y José y sus padres; Juan y José son primos, además el padre de Juan es tío de José y el de José es tío de Juan; Cualquiera de ellos puede ser el conductor y el chofer del ómnibus.
238. Son cuatro personas: el padre y la madre que son hermanos, que andan con sus hijos, por lo tanto un tío y una tía, y los hijos son primos, una hembra y un varón. Por lo que con cuatro personas se satisfacen todas las condiciones.
239. Son solo cuatro personas, un matrimonio con su hijo y la mamá de la esposa.



240. De acuerdo a los datos del

problema se formó un triángulo rectángulo donde la hipotenusa es la distancia del punto de partida al punto final recorrido luego nos queda que:

$$\overline{AB} = \sqrt{5^2 + 12^2}$$
$$\overline{AB} = \sqrt{25 + 144}$$
$$\overline{AB} = \sqrt{169}$$
$$\overline{AB} = 13\ cm$$



R/ Se alejó 13 kilómetros desde el punto de partida.

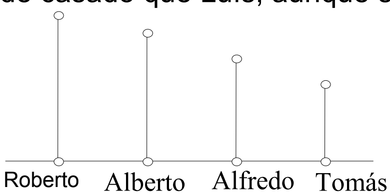
241. Si la pregunta se hace con rapidez, y el que responde no dedica tiempo para pensar, con frecuencia se obtiene una respuesta incorrecta: después de ocho días. Cuando en realidad, el último trozo será cortado el séptimo día.

242. Como el viajero sabe de donde viene, pone correctamente la flecha que marca la dirección de donde él viene e inmediatamente quedarán bien marcados todos los caminos y podrá seguir su rumbo hacia La Habana sin dificultad.

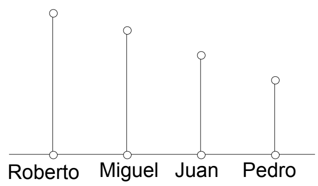
243. Como el ángulo mide $\frac{2}{3}$ del resto, esto es $\frac{2}{3} \cdot 90^0 = 60^0$ y su complemento es lo que le falta para llegar a 90^0, es decir, su complemento es 30^0.

244. Pedro, que lleva más tiempo de casado que Luís, aunque sea más joven.

245. En este caso se da como información el estado de alegría de las personas, por lo que se pueden representar las relaciones en un diagrama y cuando se termine se tiene el resultado como muestra el gráfico. De aquí que Roberto sea el más alegre y Tomás el menos.



246. En este caso se da una sola información: el tamaño de las personas, por lo que nos podemos apoyar en un diagrama lineal para representar las relaciones que nos dan, así tenemos: El más alto es Roberto. Ordenados de mayor a menos será Roberto, Miguel, Juan y Pedro.



247. Como se puede apreciar nos dan varias informaciones sobre las personas y las prendas de vestir, por lo que es conveniente hacer una tabla de doble entrada y cuando se complete se obtiene la información deseada. Luego Estela tiene una falda como muestra la tabla.

	blusas	faldas	pantalones
armen			
ela			
cia			

248. El tren B va por la vía principal y pasa con todos sus vagones más allá del desvío. Después da marcha atrás, entra en el desvío y deja en él los vagones posibles, la locomotora junto con los vagones restantes, tira hacia delante y se aleja del desvío. Luego se deja pasar el tren A; a su último vagón se enganchan los vagones del tren B, que quedaron en el desvío, y junto con ellos tira primero hacia delante, con el fin de que todos los vagones del tren B pasen a la vía principal, y luego da marcha atrás liberando la entrada al desvío. A continuación la locomotora del tren B, junto con la parte de los vagones pasa al desvío, dejando paso libre por la vía principal al tren A. Del tren A se desenganchan los vagones del tren B. El tren A continúa su marcha, mientras tanto la locomotora del tren B sale a la vía principal dando marcha atrás, engancha sus últimos vagones, que quedaron a la izquierda del desvío y sigue también su ruta detrás del tren A.

249. Esto solo es posible para el uno, pues al elevar el uno al cuadrado se obtiene el propio número, pero cuando se duplica se obtiene el doble de él, es decir dos.

250. Se tiene que $\frac{18}{2} = 9$ y que $9 \cdot 3 = 27$ minutos se adelanta el reloj en 18 horas.

251. Algo muy fácil como dentro de una hora y 40 minutos el debe sonar, pues basta con atrasarlo seis horas y media, es decir, se debe poner a las 3:50 pm para que tenga una diferencia de ocho

horas 10 minutos que es el tiempo que debe estar durmiendo (desde 10:20 pm hasta las 6.30 am hay exactamente ocho horas 10 minutos), de igual forma desde las 3:50 pm a las 12:00 de la noche hay ocho horas 10 minutos. Luego basta con atrasar el reloj seis horas y media, es decir, ponerlo en las 3:50 pm.

252. Primero tenemos que calcular cuántos días tienen que pasar para que los dos relojes vuelvan a marcar la misma hora. Como el reloj de Ana se atrasa tanto como el de Carlos se adelanta, los dos relojes volverán a marcar la misma hora cuando el de Carlos se haya adelantado seis horas y el de Ana se haya atrasado otras seis. (Entonces los dos relojes marcarán las seis, y, por supuesto, ninguno irá bien). Pero, ¿cuántos días tendrán que pasar para que el reloj de Carlos se adelante seis horas? Un adelanto de diez segundos cada hora supone un minuto cada seis horas, que es 4 minutos al día, que es una hora cada 15 días, que es 6 horas en 90 días. De modo que al cabo de 90 días los relojes volverán a marcar la misma hora.
Pero no nos han dicho en que día de enero se pusieron los dos relojes en hora. Si hubiera sido cualquier día excepto el 1 de enero, 90 días después no podía caer en marzo; tendría que caer en abril (o quizá en mayo). De modo que los relojes debieron ponerse en hora el 1^{ro} de enero. Pero aún así, 90 días después no caería en marzo a no ser que fuera un año bisiesto. (El lector puede comprobarlo con un calendario. Noventa días después del 1^{ro} de enero es el 1^{ro} de abril de un año normal y el 31 de marzo de un año bisiesto). Esto demuestra que el veintiún cumpleaños de Ana cae en año bisiesto, por tanto debió nacer en 1843, y no en 1842 ó en 1844. (Veintiún años después de 1843 es 1864, que es año bisiesto). Se nos dice que uno de los dos nació en 1842, por tanto fue Carlos quién nació en 1842. Así que Carlos es mayor que Ana.

253. Hay problemas cuya solución no es la que parece evidente, es decir, lo que a primera vista se presenta como cierto es en realidad falso. Si un reloj de pared tarda 5 segundos en dar las 6 campanadas de las 6:00, es que los intervalos entre campanadas son de un segundo. Por consiguiente, en dar las 12 campanadas de las 12:00 tardará 11 segundos.

254. Si el reloj tarda 6 segundos en dar las seis, entonces cada intervalo entre campanadas serán de 1,2 segundos. Al dar las once hay diez de esos intervalos, por lo que el tiempo total será de 12 segundos.

255. El reloj nuevo tiene 1500 partes y el reloj antiguo $12 \cdot 60 = 720$ partes. Las 3 horas y 48 minutos abarcan 228 partes. Resolvemos la siguiente regla de tres simple:
720 ------- 1500
228 ------- x
x = 475.
Es decir: las 4 horas y 75 minutos.

256. La respuesta que corrientemente hemos recibido a esta interrogante es a las 6, algo erróneo pues la respuesta correcta es a las 5 como se ilustra en la siguiente tabla:

Ana	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Carlos	1		2		3		4		5

Cuando el reloj de Ana dio las 5, el de Carlos dio 3 campanadas y tuvo que dar 2 campanadas más para señalar la hora 5.

257. Todos conocemos que una hora equivale a 60 minutos, luego solo necesitamos conocer a cuántos minutos equivale 0,35 horas, lo cual se puede resolver por una regla de tres:

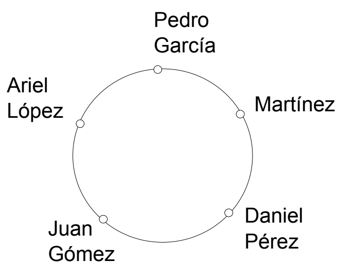
$$\left.\begin{array}{r} 0{,}35 \cdots x \\ \underline{1 \cdots 60} \end{array}\right\} \Rightarrow x = \left.\frac{0{,}35 \cdot 60}{1}\right\} \Rightarrow x = 21 \min$$

Luego podemos decir que 2,35 horas equivalen a $120 + 21 = 141 \ \min$.

258. Pedro tiene en total tres banderas, es decir, una de cada color, cuando toma la roja, todas menos dos (la azul y la amarilla) son rojas, de la misma forma para los otros colores, luego tiene una bandera de cada color.

259. La rana emplea 59 minutos para llegar al borde superior del pozo.

260. De acuerdo a lo planteado en la primera y la última afirmación los apellidos deben estar en la posición que indica la figura, pues García está entre López y Martínez y Daniel está sentado a la izquierda de Gómez y a la derecha de Martínez, pero el apellido



que falta es Pérez, luego Daniel es Pérez. Como Juan está sentado entre Ariel y el alumno Pérez, entonces Ariel es López y Juan es Gómez.

261. Puede tener 53 domingos como máximo.
262. La cantidad máxima de meses, que en un mismo año pueden ser de 5 domingos, es 5.

Cuidando la lengua materna...

263. La cintura.
264. "Chivo chiquito sin ch correctamente".
265. En el brazo.
266. De ninguna de las dos, la cebra es de color blanca y negra; aquí se pregunta por el color, no por la forma.
267. En el hueso.
268. Tú.
269. Ninguno, pues al comerse el primero deja de estar en ayuna.
270. En que los dos son sin ceros (sinceros).
271. Porque se calló, es decir, dejó de gritar.
272. No, no, no,**...**, no son cuatro, en realidad son seis, porque el altruista gavilán nos obsequia uno. (Otro pollito).
273. Sí se puede, siendo cubano de nacionalidad y de apellido Alemán.
274. En el pueblo de Guanajas en el municipio de Nuevitas.
275. El imperdible.
276. Como todos excepto 9 han muerto, entonces solo ha muerto uno y quedan 9.
277. Las dos formas son incorrectas, pues 7+4=11, no 12 como quizás no notaste.
278. La hora de los mameyes.
279. La letra ***n***, ni pensar en canguros o koalas.
280. Un embustero, un mentiroso.
281. Sí, porque un perro regalado es un can-dado (es decir un candado) y con un candado se cierra una puerta.
282. La de piloto, pues se aprende volando.
283. De la mata.
284. Para el suelo.
285. Padre e hija.
286. El falso de una prenda de vestir.
287. La tijera.
288. Socorro.
289. El de Gastón.
290. La tibia (hueso de la pierna).
291. La letra *e*, que se observa en lunes, martes, miércoles, jueves y viernes, pero no se ve en sábados ni domingos.
292. Los acordes musicales, escritos en un pentagrama.
293. En que las dos son notas musicales.
294. Justo.
295. Su viuda.
296. La siempreviva.
297. La letra *b*, en el chi**v**o es corta (la *v* es conocida por muchos como *b* corta), en el hom**b**re es larga y en la mujer no aparece.
298. El aceite (ACIT).
299. Equivocadamente.
300. Elefante.
301. En la letra *s*.
302. El perro, porque es el que siempre ladra.
303. Ninguno, porque lo que tiene son patas.
304. E - S - O.
305. Picadillo.
306. Todos separan una orilla de la otra, entonces sí hay ríos que se-paran.
307. 90 (no venta).

308. En la carnicería, todos decimos llegó la carne de vaca. Nadie dice de buey.
309. Porque vendieron un mono en 15 centavos y tocaban a mono y medio cada uno.
310. La letra *a*.
311. Una deuda.
312. El reo respondió: ustedes me ahorcarán; y claro, no podían ahorcarlo, porque entonces sería una verdad lo que había dicho y tendrían que fusilarlo; pero si lo fusilaban resultaría que era una mentira lo que había dicho y tendrían que ahorcarlo, por lo tanto para cumplir lo prometido no podían ahorcarlo ni fusilarlo.
313. Gato.
314. Ninguna, pues ya están herrados.
315. Burro, asno, borrico, jumento y pollino.
316. No es posible, pues si tiene viuda él está muerto y no se puede contraer matrimonio con alguien que esté muerto.
317. Por supuesto que lo que pesa es el hielo.
318. En el diccionario.
319. "Habana sin H correctamente".
320. Dos pinchos.
321. Alfabeto.
322. El talabartero (trabaja en cueros).
323. El escarabajo, que al virarse debía llamarse *escararriba*.
324. Cuando está parado, pues es *auto - inmóvil*.
325. La letra *y*.
326. Agapito (manda a hacer pito).
327. Cuando el huevo que se le hecha a la gallina sea del pueblo de Jicotea.
328. Otro caballo.
329. Vender agujas.
330. Sí existe, al igual que en todos los países del mundo, aunque por supuesto no con la significación que tiene para todos los cubanos.
331. Aquí existen dos posibles soluciones: una cuando en la mata hay tres mangos el muchacho se comió un mango, bajó un mango y dejó un mango, por tanto, él no comió mangos (se comió uno solo), no bajó mangos ni dejó mangos.
Cuando en la mata hay dos mangos y entonces él se come o baja o deja uno, no baja o deja o come y deja o come o baja uno, combinando todas las posibilidades en que intervengan dos mangos y que no suceda que él coma mangos, baje mangos o deje mangos.
332. El ronco.
333. Lo mejor para las hormigas es el azúcar.
334. Porque tocan el sol (nota musical sol)
335. El barco (hay que echarlo al agua).
336. El barrendero, que siempre barriendo (va riendo)
337. Tocando el timbre del elevador referido.
338. Ayuntamiento.
339. Lima.
340. Congojas.
341. Todos mis respetos.
342. Que exista el ladrón
343. Usted mismo (la propia persona).
344. Gaticos.
345. Será fina (Serafina).
346. Ninguno, todos tienen o más o menos.
347. El mulo que es hijo de una yegua y de un burro.
348. Roma, que al revés es amor.
349. La mona.
350. Porque esa persona está viva y solo es permitido que se entierren las personas muertas, se cometería un gran crimen y por supuesto sancionado.
351. En el diccionario
352. Porque la perdiz comió antes de que la mataran.
353. En el diccionario.
354. La zorra que al invertirlo se convierte en arroz.

355. El pez se convierte en pescado.
356. Noveno, que quitándole la del medio queda nono que significa noveno.
357. Porque el gato estaba en tierra sobre su propia cola y no se mojaba.
358. Porque siempre “generalmente” se escribe con *g*.
359. Son las dos menos cuartos, pues falta un cuarto para las dos.
360. El suicidio.
361. Una carta grande.
362. La pata.
363. OSO, ANA, REINIER, SOLOS...
364. El hoyo o el agujero.
365. Anteayer, ayer, hoy, mañana, y pasado mañana.
366. Cubanos.
367. La suela que siempre anda sobre el suelo.
368. En la tierra, pues en el mar lo que hay son peces.
369. Un ramo grande.
370. ESTO.
371. El ratón es el que esta sujeto (atrapado).
372. Juan se va a caballo y quien se llama “Sin Embargo” (puede ser su perro) va a pie.
373. Porque él no toma en subida, pero en bajada o llano si toma y puede llegar borracho a Las Tunas.
374. El anoncillo, las que faltan que son la *u* y la *e*, pero están en el cuesco.
375. El delfín (del fin).
376. Las 4 patas.
377. El gallo, por que tiene año y pico.
378. La tercera: algún gato no es negro, aquí se niega el todo con algún y el negro con el no es negro; que es la forma correcta de negar la proposición.

Piensa y responde...

379. Se le reparte una naranja a cada una de las personas, pero a una de ellas se le entrega la naranja dentro de la cesta.
380. Está muy claro son tres gatos, pues hay uno delante de dos (son tres), hay uno entre dos (son tres) y uno detrás de dos (son tres).
381. Son muchas las reflexiones que se realizan y se llegan a respuestas falsas como 12, 7, 16 y hasta 32; pero la respuesta correcta es que en el cuarto hay solamente cuatro gatos: uno en cada esquina, frente a cada uno tres gatos más y cada uno está sentado sobre su propio rabo.
382. Como en la respuesta de que dos 2 forman el número 22 da la coincidencia de que a las palabras dos dos la respuesta correcta es el 22, entonces en una respuesta rápida, sin un razonamiento lógico adecuado, a las palabras tres tres se le asocia el número 33, cuando la respuesta correcta sería un número de tres cifras repetidas del número 3, o sea, el 333.
383. Realmente el herrero tomó un trozo de cadena de tres eslabones, los abrió y con cada eslabón unió dos trozos más de manera que formó una cadena continua, por lo que solo cobró 60 centavos, o sea, 20 centavos por cada unión.
384. Primero hay que reconocer cuál es el menor número de tres cifras distintas, queda claro que la primera de la izquierda no puede ser cero, luego, es 1; la del medio sí es cero, y la última será dos. Luego el menor número de tres cifras distintas es 102 y su doble es 204.
385. Para la mayoría se ganaría 15 pesos, pero lo cierto es que del 15 al 30 (incluyendo a ambos) hay 16 días, por lo que se ganará 16 pesos.
386. Con frecuencia se da una respuesta incorrecta: se dan 18 cortes, cuando en realidad se dan 17 cortes, pues el último trozo de 5 metros ya está picado con el corte 17 que se haga.
387. Se da una serie de datos que no hacen falta, pues si un mono vale 15 centavos el par será a 30 centavos.
388. Consideremos un jugador ganador, es decir que no pierde, para ganar el torneo se debe enfrentar a los 110 atletas restantes, luego será necesario utilizar 110 pelotas nuevas.
389. Esto solo es posible, si la hija del zapatero es la mujer del herrero, en ese caso se habla solo de tres personas que cada una consume tres huevos y en total consumen 9.

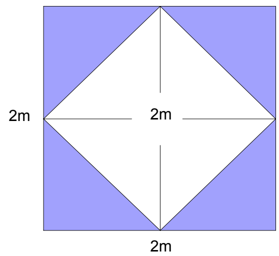
390. Se procede de la misma forma que en el ejercicio anterior, en este caso la mujer del médico es la hija del panadero y solo se habla de 3 personas por lo que tocan a 3 naranjas para cada una y en total son 9 naranjas para las 3 personas.

391. Al sentarse en una mesa redonda de forma que no existan dos mentirosos juntos la cantidad de personas tiene que ser un número par, luego el que dice la verdad es el presidente y a la reunión asistieron 40 personas.

392. Hay que tener en cuenta que se está entrando hasta la mitad del bosque, pues de ahí en lo adelante se está saliendo, por lo tanto está entrando hasta los 9km y como él recorre 3km cada media hora necesita hora y media para entrar en el bosque.

393. Basta escribir el número 666 y después girar el papel en 180^0 y resultará el 999 que es una vez y media 666.

394. Uniendo los puntos medios de la ventana nos quedaría que la nueva ventana sería un cuadrado que tiene de lado $\sqrt{2}\,\mathrm{m}$ y por tanto su área es $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2\,\mathrm{m}^2$, lo que representa la mitad del área de la ventana inicial, y sigue teniendo 2m de alto y 2m de ancho.



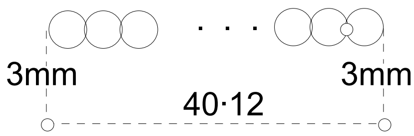
395. El oso es blanco porque se encuentra en el polo norte, que es el único lugar donde al hacer ese recorrido usted llega al mismo punto, y en el polo norte todos los osos son blancos.

396. Se requiere un buen razonamiento para determinar que la única forma en que faltándole un centavo a uno y decidiendo unir el dinero no puedan comprar el libro es que uno de ellos no tenga dinero y a pesar de querer unir su dinero no les alcanza para comprar el libro, hecha esta reflexión se llega a la conclusión de que el libro cuesta 45 centavos, que Juan tiene 44 centavos y Alfredo no tiene dinero.

397. Debemos partir de la condición de que la balanza se encuentra en equilibrio, es decir, que en ambos platillos se ha colocado el mismo peso, por lo que como en un platillo se tiene un ladrillo entero y en el otro se tiene medio ladrillo y una pesa de 1,5kg, quiere decir que medio ladrillo pesa 1,5kg pues la pesa sustituye al medio ladrillo y el ladrillo completo pesa 1,5·2=3kg.

398. Como cada metro de tela vale 17 pesos entonces $5\tfrac{1}{4}\cdot 17 = \dfrac{21}{4}\cdot 17 = \dfrac{357}{4} = 89\tfrac{1}{4}$ pesos, es decir, los $5\tfrac{1}{4}$ metros de telas cuestan 89 pesos y 25 centavos. Si paga con un billete de \$100,00 se le deben devolver un total de $100{,}00 - 89{,}25 = 10{,}75$ pesos. El vuelto será de 10 pesos con 75 centavos.

399. Es necesario darse cuenta que solo nos interesa el grosor del primer y último eslabón de la cadena por una de sus partes y los 40 espacios que tenemos, luego el largo de la cadena será 3+40·12+3=486 milímetros, es decir, 48,6cm de largo.



400. Como los quince primeros suman 120 y los últimos cinco 140 entonces los restantes sumarán: 465-(120+140)=205

401. Erróneamente se contesta que 7 cigarros, pero en realidad se fumó 8, pues con las 49 colillas que recogió hizo 7 cigarros, pero al fumarse estos 7 cigarros le quedaron 7 colillas más con las que pudo hacer otro cigarro y fumárselo; luego se fumó 8 cigarro con 49 colillas.

402. Simplemente picó el tercer eslabón, el primer día le entregó ese eslabón; al segundo día entregó los dos unidos y recogió el abierto; al tercer día entregó el abierto; al cuarto día los cuatros pegados y recogió los otros tres; el quinto día el abierto; el sexto día los dos unidos y recogió el abierto; el séptimo día entregó el abierto; así picó un solo eslabón de la cadena y cada día pagó uno.

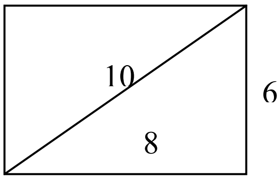
403. Nos queda claro que para escribir los números 9, 19,**...**, 89 se necesitan 9 números 9 y para escribir los números 90, 91,**...**, 99 se necesitan 11 números, luego para escribir los números del 1 al 100 se necesitan 20 números 9.

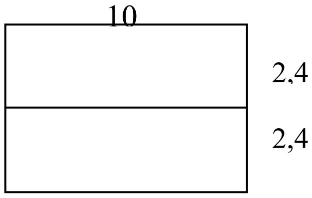
404. $x \rightarrow$ cantidad de galones que se necesitan para pintar el muro.

$$\left.\begin{array}{l} 12 \text{-------} \dfrac{5}{6} \\ x \text{-------} \dfrac{1}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow x = \dfrac{12 \cdot \dfrac{1}{6}}{\dfrac{5}{6}} = \dfrac{12}{5} = 2{,}4$$

R/ se necesitan 2,4 galones para terminar de pintar el muro.

405. Sí es posible y existen dos posibilidades:





2.4

fig 1 **fig 2**

2,4

Caso I: Si la parcela tiene 8 metros de largo por 6 de ancho, se traza la diagonal que es de 10 metros (por trío pitagórico). Y obtenemos dos triángulos iguales y por tanto tienen la misma área, como muestra la **fig 1**.

Caso II: Si la parcela tiene 10 metros de largo por 4,8 de ancho, se busca la paralela media y se obtienen dos cuartones de igual área y que se pueden dividir por una cerca de 10 metros, como muestra la **fig 2**.

406. Para calcular la media aritmética se suman todos los términos y se divide entre la cantidad de términos. Por lo que se tiene:

$$\frac{23 + x + 17 + 9}{4} = 19 \qquad x = 76 - 49$$
$$49 + x = 19 \cdot 4 \qquad x = 27$$

R/ El valor de *x* es 27.

407. Se establece una proporción:

$$\left.\begin{array}{l} 180\,\text{km} \text{ ------ } 6\,\text{cm} \\ x\,\text{km} \text{ -------- } 14\,\text{cm} \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{180 \cdot 14}{6} \Rightarrow x = 420$$

R/ La distancia real es de 420km.

408. Para la elaboración de la pieza se necesitan 5,5 minutos, que es equivalente a decir que se necesitan 330 segundos, como ahora se ahorran 24 segundos del tiempo inicial entonces solo se emplean $330 - 24 = 306$ segundos.

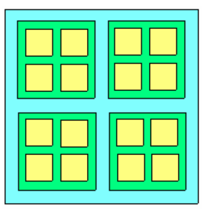
409. Adelantó 1hora y 39 minutos, lo que es igual a 99 minutos.
Transcurrió 33 horas desde las 9 am hasta las 6 pm del siguiente día. Sea: $x \rightarrow$ minutos que adelanta por hora

$33x = 99 \Rightarrow x = 3$

R/ Adelanta 3 minutos por cada hora.

410. Desde las 5 pm hasta las 9 am han transcurrido 16 horas por lo que el reloj se adelanta 4 medios minutos, (medio minuto por cada cuatro horas) es decir 2 minutos en 16 horas, luego la hora exacta en ese momento es 8:58 am.

411. La cantidad de cajas es: $1 + 4 + 4^2 = 21$, la azul más las 4 verdes más las 16 amarillas, como se muestra en la figura.



412. *x*→ porcentaje que supera

$24 - 16 = 8$ niños más que niñas

$$\left.\begin{array}{l} 40 \cdots 100\% \\ 8 \cdots x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 100}{40} \Rightarrow x = 20\%$$

R/ Los niños superan en un 20% a las niñas.

413. Muchos piensan erróneamente, que con tres zapatos se resuelve el problema, pues son de dos colores; pero hay que tener en cuenta además que los zapatos son izquierdos y derechos; luego, por ejemplo, puede suceder que se extraigan 5 zapatos negros derechos y cinco zapatos

carmelitas izquierdos y no hemos logrado un par del mismo color, ahora cuando se extraiga el próximo zapato es carmelita derecho o negro izquierdo y se forma el par del mismo color, por lo que se puede concluir que para estar seguros de tener un par de zapatos de un mismo color es necesario extraer 11 zapatos.

414. Se procede de la misma forma que en el ejercicio anterior. En el caso extremo se pueden extraer, digamos, 10 guantes negros izquierdos y 10 guantes blancos derechos y no tenemos el par, pero cuando tomemos el 21 este es o negro derecho o blanco izquierdo y ya tenemos el par, por lo tanto se necesitan extraer 21 guantes para estar seguro de tener un par de guantes del mismo color.

415. Tenemos dos colores de medias por lo tanto basta con sacar 3 medias y estaremos seguros de tener un par de medias del mismo color. Ahora para los guantes debemos proceder como en el ejercicio anterior; los guantes son de dos colores pero pueden ser derechos o izquierdos, por lo tanto es necesario extraer 21 guantes para estar seguro de que existe al menos un par del mismo color, pues en el caso extremo se pueden extraer, digamos, 10 guantes negros izquierdos y 10 guantes blancos derechos y no tenemos el par, pero cuando tomemos el 21 este es o negro derecho o blanco izquierdo y ya tenemos el par.

416. Bastaría con sacar 5 medias, de esta forma solo se pueden dar las siguientes variantes:

- 4 ó 5 medias negras (blancas). Habrá dos pares de medias negras (blancas).
- 2 ó 3 medias negras o blancas. Habrá un par de medias negras y un par de medias blancas.

Si los dos pares de medias tienen que ser coincidentes (los dos pares del mismo color) se necesitan extraer 7 medias.

417. Se debe proceder de forma análoga al ejemplo 26 del capítulo I del libro de preguntas. Pensar que tienen que existir elementos comunes en las hileras y como son cinco hileras se debe pensar en un pentágono, en este caso en un pentágono estrellado, como muestra la figura 3.

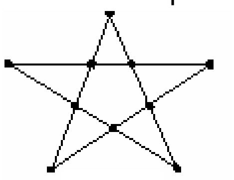


fig 3

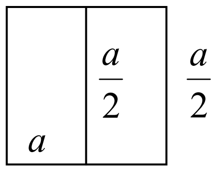


fig 4

418. Es conveniente apoyarse en una representación como la de la figura 4, de aquí cada rectángulo tiene como lado *a* y $a/2$ por lo que tenemos:

$$2\left(a + \frac{a}{2}\right) = 42$$

$$\frac{(2a + a)}{2} = 21$$

$$3a = 42$$

$$a = 14$$

$$A = a \cdot \frac{a}{2}$$

$$A = \frac{a^2}{2}$$

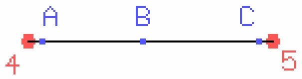
$$A = \frac{14^2}{2}$$

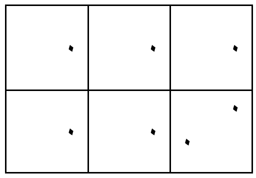
$$A = 98\ cm^2$$

Luego cada rectángulo tiene $98 cm^2$ de área.

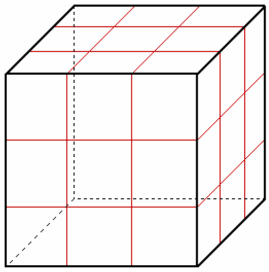
419. Debemos partir de que el año tiene 365 días (366 si es bisiesto), por lo que puede suceder que encontremos en la escuela 365 (366) estudiantes que cumplan cada uno un día distinto, pero el estudiante 367 tiene necesariamente que cumplir año uno de los 366 días anteriores; por lo que al menos dos cumplen año el mismo día.

420. Podemos considerar tres puntos como se muestra en la figura, en los cuales la diferencia no es menor que $\frac{1}{3}$, pero al ubicar el cuarto punto en ese intervalo necesariamente la diferencia de ese con uno cualquiera de los otros es menor que $\frac{1}{3}$.

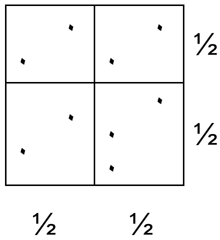




421. Hagamos una división del rectángulo en seis cuadraditos iguales, de manera que cada uno de los cuadraditos tenga de lado 1cm. Si distribuimos siete puntos en el rectángulo de manera aleatoria, al menos dos estarán situados en un mismo cuadrado y como la mayor distancia posible entre dos puntos situados en uno cualquiera de esos cuadrados es $\sqrt{2}$, los dos puntos señalados están separados a una distancia no mayor que $\sqrt{2}$.
422. Se encuentran 11 veces, pues es erróneo pensar que cada hora se encuentran una vez el horario y el minutero, en el intervalo comprendido entre las 11:00 y 1:00, esto solo ocurre una sola vez que es a las 12:00 exactamente. De igual forma en 12 horas se encuentran en dirección opuesta 11 veces y forman un ángulo de 90^0 dos veces por hora, es decir 22 veces en el término de 12 horas.
423. Hagamos una división del cubo en 27 cubitos de 1cm de arista cada uno. Si tomamos 27 puntos y los colocamos en el interior de cada cubito, al ubicar el punto 28 en cualquier cubito, la distancia de esos dos es menor que la diagonal del cubo que es $\sqrt{3}$, por lo que al menos existe un par de puntos cuya distancia entre ellos es menor que $\sqrt{3}$.



424. Consideremos una división del cuadrado dado en cuatro cuadraditos de lado $\frac{1}{2}$ u, y su área será de $\frac{1}{4}$ u^2. Al distribuir 9 puntos, al menos en uno cualquiera de estos cuadraditos quedan ubicados tres de ellos y el área del mayor triángulo comprendido en uno de estos cuadraditos tendrá un área de $\frac{1}{8}$ u^2. Por tanto, a lo sumo, esa será la mayor área del triángulo determinado por tres puntos.



425. Teniendo en cuenta que las coordenadas enteras de un punto [en la forma (x;y)] en el plano pueden ser pares o impares, tenemos solo cuatro posibilidades de acuerdo a la paridad (P) o imparidad (I) de los componentes de las coordenadas: (P;P), (P;I), (I;P), (I;I). Por tanto, si tomamos cinco puntos, podemos tener cuatro con las condiciones anteriores, pero el quinto debe repetir una de las posibilidades anteriores y por ende tendrán la misma paridad – los dos son pares o impares y la suma de dos pares (impares) es un número par (par) - entonces se obtendrán números enteros en las coordenadas del punto medio del segmento determinado por estos dos puntos de la misma paridad.
426. Siguiendo el razonamiento del ejercicio anterior tenemos que en el espacio euclidiano existen 8 tipos de puntos atendiendo a la paridad de sus coordenadas, es decir, pueden ser: (P,P,P); (P,P,I); (P,I ,I); (P,I,P); (I,P,P); (I,I,P); (I,P,I); (I,I,I). Por lo que se pueden escoger 8 puntos con estas condiciones pero el noveno punto tiene necesariamente que ser de unas de las 8 formas anteriores y como la suma de dos pares es un número par y la suma de dos impares también es un número par entonces, como al menos dos de estos puntos tiene la misma paridad, el punto medio del segmento que une a estos dos puntos también tiene coordenadas enteras. De forma general, para un espacio n-dimensional podemos escoger 2^n +1 puntos látices y garantizar que el punto medio del segmento que une al menos a dos de ellos está ubicado en un punto de coordenadas enteras.
427. Como se reparten las galletas en el orden en que se encuentran los cuatro se divide la cantidad de galletas entre los cuatro y como deja resto 3 quiere decir que la última galleta se le entrega al tercero, que es María.
428. El triángulo ABC es equilátero y su lado es igual a la suma de los radios de dos circunferencias, que como son iguales basta multiplicar por 2, luego, el lado es de 6cm y su perímetro será 6·3=18 cm.

429. Aquí es necesario llevar los 136 minutos a horas-minutos, es decir, la película es de 2 horas y 16 minutos, por lo que se debe grabar en EP 16 minutos y comenzar a grabar en SP durante 2 horas.

430. Por las condiciones del problema se cumple que:

$$\begin{aligned} P &= A \\ 2(a+b) &= ab \\ 2a+2b &= ab \\ 2b &= ab-2a \\ 2b &= a(b-2) \\ a &= \frac{2b}{b-2} \end{aligned}$$

P→ perímetro
A→ área
a y b→ lados del rectángulo

Como a y b tienen que ser números positivos, entonces *b*-2 tiene que ser positivo, entonces *b*>2.
Al efectuar la división de 2*b* por *b*-2 se obtiene como cociente 2 y resto 4 y tenemos que $a = \frac{2b}{b-2} = 2 + \frac{4}{b-2}$ como *a* tiene que ser un entero positivo, $\frac{4}{b-2}$ también lo será, pero como *b*>2, entonces *b* toma los valores 3, 4 ó 6 y el de *a* será 6, 4 ó 3. De ahí que la figura buscada será un rectángulo de lados 3 y 6 ó un cuadrado de lado 4.

431. Para despejar la incógnita hagamos una sustitución:

Si $x^3 = y$ entonces $x = \sqrt[3]{y}$ por lo que la ecuación quedará en la forma: $(\sqrt[3]{y})^{y} = 3$

elevando al cubo ambos miembros

$$y^{y} = 3^{3} \Rightarrow y = 3$$
$$x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow x = \sqrt[3]{3}$$
por consiguiente

Se puede comprobar que: $\sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}^{3}} = \sqrt[3]{3}^{3} = 3$

432. En este caso no es necesario calcular las raíces, basta con aplicar propiedades de la potencia. Como los índices de los radicales son 5 y 2, elevamos ambos términos al exponente 10.

$(\sqrt[5]{5})^{10} = 5^{2} = 25 \qquad (\sqrt{2})^{10} = 2^{5} = 32$

y como 25 < 32 entonces $\sqrt[5]{5} < \sqrt{2}$

433. Elevemos ambas expresiones a la potencia de exponente 28.

$$(\sqrt[4]{4})^{28} = 4^{7} = (2^{2})^{7} = 2^{14} = 2^{7} \cdot 2^{7} = (2^{7})^{2} = 128^{2}$$

$$(\sqrt[7]{7})^{28} = 7^{4} = 7^{2} \cdot 7^{2} = (7^{2})^{2} = 49^{2}$$

Por tanto $128^2 > 49^2$ es decir 128>49 y entonces $\sqrt[4]{4} > \sqrt[7]{7}$

434. Si elevamos ambas expresiones al cuadrado tenemos:

$(\sqrt{7}+\sqrt{10})^{2} = 7 + 2\sqrt{70} + 10 = 17 + 2\sqrt{70}$ **(I)**

$(\sqrt{3}+\sqrt{19})^{2} = 3 + 2\sqrt{57} + 19 = 22 + 2\sqrt{57}$ **(II)**

Restándole 17 a ambas ecuaciones se obtiene

$2\sqrt{70}$ **(I)**

$5 + 2\sqrt{57}$ **(II)**

Elevando nuevamente al cuadrado tenemos

$(2\sqrt{70})^{2} = 4 \cdot 70 = 280$ **(I)**

$(5+2\sqrt{57})^{2} = 25 + 20\sqrt{57} + 228 = 253 + 20\sqrt{57}$ **(II)**

Restándole 253 a ambas ecuaciones tenemos

27 **(I)**

$20\sqrt{57}$ **(II)**

Como $\sqrt{57} > 2 \Rightarrow 20\sqrt{57} > 40$ y $40 > 27$ por tanto

$\sqrt{3} + \sqrt{19} > \sqrt{7} + \sqrt{10}$

435. Las mujeres se tomaron 1+2+3+4=10 botellas de cerveza, por lo que los hombres se tomaron 22, las que se deben combinar de forma tal que represente una, dos, tres, cuatro veces las de sus esposas.

	María	Yaquelí	Lili	Lina	
Mujeres	1	2	3	4	10
Veces	3	4	1	2	-
Hombres	3	8	3	8	22
	Sánche	Pérez	García	Vidal	32

Las parejas son María y Sánchez; Yaquelín y Pérez; Lili y García; Lina y Vidal.

436. Como cada aula tiene 30 alumnos y un docente y la escuela tiene 600 alumnos, entonces tiene 600:30=20 aulas y por tanto 20 docentes.

437. Los triángulos equiláteros son equiángulos (60^0), isósceles y polígonos regulares, pero no son congruentes entre sí, pues para ser congruentes se necesita que un lado de esos triángulos sea igual. Se puede demostrar con un contraejemplo: un triángulo equilátero de 3cm de lado y otro de 5cm de lado no son congruentes (sí semejantes).

438. Utilizaremos las tablas de valores de verdad:

	I caso		II caso		III caso	
Andrés	V	V	F	V	F	F
Braulio	F	F	V	V	F	F
Carlos	F	F	F	F	V	V

Es necesario diferenciar tres casos:

Caso 1: Supongamos que las dos afirmaciones de Andrés son verdaderas, entonces las afirmaciones de Braulio y Carlos son falsas y esto no es posible pues solo hay dos afirmaciones verdaderas.

Caso 2: Si las dos afirmaciones de Braulio son las ciertas, entonces la primera de Andrés y las dos de Carlos son falsas y la segunda de Andrés es verdadera y esta es una posible solución.

Caso 3: Suponiendo que las afirmaciones de Carlos son verdaderas, las otras cuatro son falsas y no satisface las condiciones del problema.

Al hacer las suposiciones se comprueba que en el segundo caso es donde existen tres afirmaciones verdaderas y por tanto se concluye que *Braulio* fue el que *pescó más* y *Carlos* la *menor cantidad*.

439. Todo el que trata de responder rápidamente en ocasiones comete errores al plantear que 12 cuadraditos (al calcular que $3/5$ de 20 es 12), pues hay que darse cuenta que ya hay 4 rayados, luego solo se necesitan rayar 8 cuadraditos.

440. Como la primera se la toma a las 12 del mediodía, la segunda a las 3:45 pm y la tercera a las 7:30 pm y no pensar nunca en multiplicar $3 \cdot 3{,}45$.

441. De acuerdo a las suposiciones de debe analizar dos casos:

Caso I: Supongamos que A ocupa el primer lugar, entonces la afirmación es verdadera; como A no llega segundo, B no ganará; pero la tercera afirmación como A no llega tercero (ganó) entonces C ganará, con una contradicción de que A y C ganaron.

Caso II: Si gana C, entonces A es tercero para que B no gane y quede en segundo lugar por lo que se satisfacen las cuatro afirmaciones de ahí que el orden de llegada de los ciclistas es: C primero, B segundo y A tercero.

442. Como los 4 pacientes decidieron mentir, en realidad se cumple que:

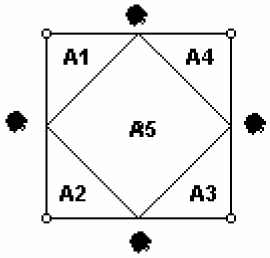
El primero: alguno lo mató (uno de los cuatro). El médico estaba muerto cuando él se fue.

El segundo: no fue el segundo en llegar. El médico estaba vivo cuando él llegó.

El tercero: no fue el tercero en llegar. El médico estaba muerto cuando él se fue.

El cuarto: el asesino llegó después de él. El médico estaba vivo cuando él llegó.
De estas condiciones se tiene que: el segundo fue el primero en llegar y después el cuarto, como el tercero no puede ser tercer, entonces el primero fue el que llegó después del cuarto y por tanto es el asesino del médico.

443. Este es un problema geométrico en el cual debemos tener los vértices del cuadrado como puntos medios para construir el nuevo cuadrado donde su área sea el doble de la anterior, como muestra la figura..

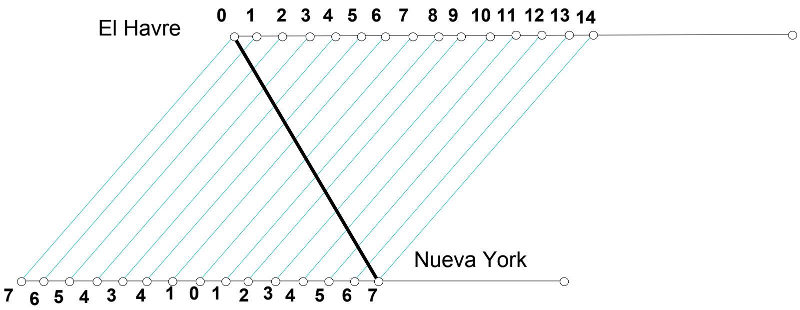


A1=A2=A3=A4

A1+A2+A3+A4=A5

444. Para formar un cuadrado con 32 cerillas se deben colocar 8 cerillas en cada lado, luego la mayor longitud del cuadrado será 8.1,25 = 10cm.

445. Por supuesto que todo el que responde con 7 buques está equivocado, pues hay que tener en cuenta tanto los buques que ya navegan hacia El Havre, como los que partirán en dicha dirección. En el momento de la salida de un buque de El Havre, con dirección a dicho puerto, se encontrará 8 navíos de la misma compañía (uno de ellos entra en el puerto en ese instante y el otro parte del puerto de Nueva York) con los cuales se cruzará. Además, durante los 7 días de navegación, de Nueva York salen otros 7 buques (el último en el momento en que este llega al puerto) que también se cruzan con el buque, o sea la respuesta correcta es que se cruza con 15 buques.
Hemos realizado esta representación para que se entienda mejor, obsérvese que al partir de El Havre el buque 0, de Nueva York ha salido el 7 (que llega en ese momento), 6,5,4,3,2,1 y 0 (que salen en ese mismo momento, es decir 8 buques, y a partir de ahí en los días de travesía se encuentra con 1,2,3,4,5,6 y 7 (sale en el momento en que llega). Fíjense en la línea 0 a 7 (en negro) se cruza con 13 (más la de salida y llegada) en total son 15 buques con los que se encuentra. Podemos concluir que los encuentros se producen diariamente a las 12 del mediodía y la media noche.



446. Basándonos en el Álgebra y la Geometría tenemos:

$a \rightarrow \text{cateto1}$
$b \rightarrow \text{cateto2}$
$c \rightarrow \text{hipotenusa}$

$$a+b+c=24 \Leftrightarrow a+b=24-c \; (\textit{perímetro del triángulo})$$

$$\frac{a\cdot b}{2}=24 \Leftrightarrow a\cdot b=48 \qquad (\textit{área del triángulo})$$

$$(a+b)^2=(24-c)^2$$

$$a^2+2ab+b^2=24^2-48c+c^2$$

$$y\ como\ a^2+b^2=c^2\ por\ Pitágoras$$

$$2ab+c^2=24^2-48c+c^2$$

$$2\cdot 48=24^2-48c \quad dividiendo\ por\ 24$$

$$2c=24-4$$

$$c=10$$

$$a+b=24-c$$
$$a+b=24-10$$
$$a+b=14$$
$$a=14-b$$

$$a\cdot b=48$$
$$(14-b)\cdot b=48$$
$$14b-b^2=48$$
$$b^2-14b+48=0$$
$$(b-8)(b-6)=0 \Rightarrow b=8 \text{ ó } b=6$$

Sí $b=8$ entonces $a=6$, y sí $b=6$ entonces $a=8$.
R/ Los lados del triángulo deben ser 6, 8 y 10 centímetros respectivamente.
Otra forma de proceder es utilizando el tanteo inteligente y un trío de números pitagóricos.

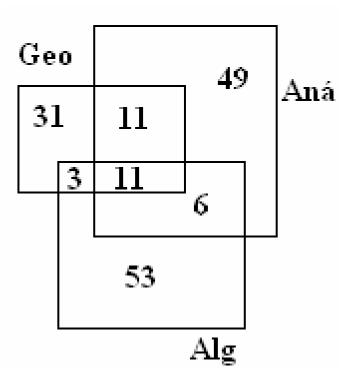
447. Como tres tazas llenan $\frac{2}{5}$ de la jarra entonces 6 tazas llenarán $\frac{4}{5}$ de la jarra y para llenar $\frac{1}{5}$ que falta de la jarra, solo se necesita la mitad de las tres tazas, es decir, 1,5 tazas; por tanto para llenar la jarra se necesitan 3+3+1,5=7,5 tazas de agua.

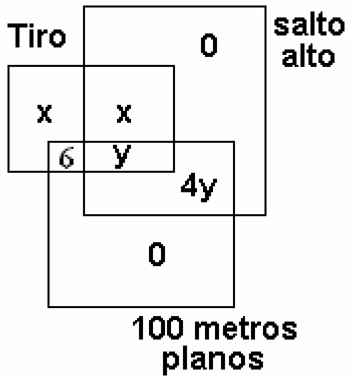
448. Como 3 es la mitad de 5, entonces $3\cdot 2=6$, o sea 5 será 6, pero 12 es $6\cdot 2$, luego 10 será 12 (por ser 5 el 6) y como la tercera parte de 12 es 4, este será el resultado. Si 3 es la mitad de 5, entonces 4 es la tercera parte de 10.

449. Para que vuelva a marcar la hora correcta necesita adelantarse 12 horas para comenzar a marcar la hora exactamente por lo que debemos calcular cuántos son los minutos que debe adelantarse para tener adelantadas 12 horas, o sea, $12\cdot 60=720$ minutos, pero como cada 12 horas se adelanta 48 minutos debemos dividir 720 entre 48 lo que da como resultado 15, lo que quiere decir que deben transcurrir 15 medios días (15 veces 12 horas) o lo que es lo mismo 7 días y medio para que vuelva a dar la hora exacta, por lo tanto será el día 2 de octubre a las 10 pm.

450. Es la una y veinte minutos de la tarde. Puesto que el reloj pierde seis minutos cada hora, por cada hora real el reloj mostrará solo 54 minutos. Como muestra las 10:12, sabemos que ha marcado 612 minutos. Esto equivale a 680 minutos reales, y por lo tanto a once horas y veinte minutos. El reloj se detuvo hace dos horas, y por lo tanto son las 13:20 pm.

451. En este caso es conveniente hacer un diagrama con conjuntos e ir completando de adentro (lo común a los tres) hacia fuera (uno solo), como muestra la figura de la izquierda





Geometría: 11 + 3 + 11 + 31 = 56
Álgebra: 11+ 3 + 6 + 53 = 73
Análisis: 11+ 6 + 11 + 49 = 77
Para conocer la matrícula de la escuela sumamos:
11+ 11 + 6 + 3 + 31 + 53 + 49 = 164 alumnos.

452. Procediendo de la misma forma que en el ejercicio anterior tenemos (figura de arriba, a la derecha):
x: alumnos en tiro solamente
y: alumnos en las tres disciplinas
Tiro: $2x+y+6$
Salto alto: $x+5y$

100 metros: $5y+6$

Como el grupo tiene 28 alumnos tenemos:

$y+2x+4y+6=28$

$$2x+5y=22$$

$$x=\frac{22-5y}{2} \quad \text{como}\, x>1 \text{ entonces } 0<y<5$$

Por tanto y debe tomar los valores 1,2,3 ó 4

Para $\mathrm{y}=1$ entonces $x=\frac{17}{2}\notin \mathrm{N}^*$

Para $\mathrm{y}=2$ entonces $x=6$, posible solución

Para $\mathrm{y}=3$ entonces $x=\frac{7}{2}\notin \mathrm{N}^*$

Para $\mathrm{y}=4$ entonces $x=1$, que no es solución porque los de tiro tienen que ser una cantidad mayor que 1.

Luego la solución es para cuando $x=6, y=2$.

En tiro participan $2\cdot 6+2+6=20$, en salto alto $6+5\cdot 2=16$ y en 100 metros planos $6+5\cdot 2=16$ alumnos

453. Está claro que aquellos números en los que sus tres cifras son iguales son equilibrados, por tanto tenemos 9 casos.
Cuando 1 es el promedio, existe un trío de números que se pueden permutar y tenemos P_3=3!=6 casos, pero debemos quitarle dos porque el cero no puede estar en la primera cifra, y tenemos cuatro casos. Para cuando el promedio es 2, son dos tríos y tiene $2P_3$-2=12-2=10 casos, para cuando es 3, $3P_3$-2=18-2=16; para cuando es 4, tendría $4P_3$-2=24-2=22, para cuando es 5, $4P_3$=24, aquí no se quitan dos porque no tiene cero, para 6 es $3P_3$=18, para 7 es $2P_3$=12 y para 8 es P_3=6 y sumando nos da 121 números equilibrados.

454. Se pude proceder a partir de que la velocidad del sonido es de 340m/s, y como demoró 6s multiplicamos $340\cdot 6=2040\mathrm{m}$, es decir que el rayo cayó aproximadamente a 2km y 40m del lugar.
También se pueden auxiliar en la fórmula física de $\mathrm{S}=\mathrm{v}\cdot \mathrm{t}$ y obtener el mismo resultado.

455. El mayor valor será 97430 y el menor es 30479, hay que considerar que la primera cifra no puede ser cero, pues ya no tendría un número de cinco cifras, sino de cuatro.

456. Del 190 al 199 son 10 los 9 que aparecen en las decenas, lo mismo ocurre del 290 al 299 y así sucesivamente, hasta llegar del 990 al 999, por lo que tiene $10\cdot 9=90$ números en los que la cifra 9 ocupa el lugar de las decenas.

457. Muchos piensan que es el 111111 ó el 333333, pero en realidad el menor múltiplo de 3 que tiene 6 cifras es el 100002.

458. El valor de *Z* debe ser 5

459. La ***y*** puede tomar los valores 0, 3, 6 y 9; pues 5+ 0+7=12, luego ***y*** debe tomar todos los múltiplos de 3 de una sola cifra.

460. En este caso $b=0$ (termina en cero) para que sea divisible por 2 y 5 a la vez, y $a=2$ para que sea un número divisible por 11 (5+8 –2-0=11) luego el número es 5280.

461. Para determinar el número se debe calcular el $\mathrm{m.c.m}(8,12,15)=2^3\cdot 3\cdot 5=120$ y como tiene que dejar resto 7 se suma 120+7=127 es el menor número que dividido por 8, 12 y 15 deja resto 7.

462. Para determinar la longitud del lado del cuadrado se debe determinar el $\mathrm{M.C.D}(30,24)=6$ y para calcular la cantidad de cuadrados que se pueden obtener dividimos cada dimensión entre el $\mathrm{M.C.D}$, o sea, 30:6=5 y 24:6=4, y se pueden obtener $5\cdot 4=20$ cuadrados con las exigencias planteadas.

463. Se comete el error de responder apresuradamente que demoran cinco minutos, cuando se hace un análisis detallado, se puede dar cuenta que para recorrer del primero al quinto poste solo hay cuatro espacios por lo que para ir de un poste al otro el automóvil demora 5:4=1,25 minutos o sea un minuto y quince segundos, pero, para ir del quinto al décimo poste hay cinco espacios, por lo tanto para ir del quinto al décimo poste emplea 5 minutos para los cuatro

primeros y un minuto y quince segundos para el último. En total emplea 6 minutos con 15 segundos para ir del quinto al décimo poste.

464. Tenemos que el número buscado debe ser de la forma $\overline{4a6}$ y que sea divisible por 9 (la suma de sus cifras básicas debe ser un múltiplo de 9), es decir, $4+a+6$ debe ser divisible por 9, por lo que *a* debe ser 8 y tenemos el número 486.

465. Parecido al ejercicio anterior buscamos un número $\overline{38b7}$ que sea divisible por 9. O sea $3+8+\mathrm{b}+7$ un múltiplo de 9, como 3+8+7=18 entonces $\mathrm{b}=0$ es una posibilidad y $\mathrm{b}=9$ es otra posibilidad, luego tenemos los números 3807 y 3897.

466. En este tipo de ejercicio aparecen datos que no nos interesan para la solución, pues no importa los que bajan o suben, sino ir contando las paradas que hace, si se dan cuenta realiza 7 paradas: en Becerra, Naranjo, Molinet, La Viste, Vázquez, Maniabón y en Puerto Padre.

467. Para determinar la velocidad del ciclista y recorrer esas distancias debemos calcular el $\mathrm{M.C.D.}(32,48,72)=8$. Por lo tanto la mayor velocidad a que puede correr es 8km/h.

468. Como Daniel tiene la mayor edad que cabe exactamente en la de los otros tres se debe calcular el $\mathrm{M.C.D.}(30,48,72)=6$. Luego Daniel tiene 6 años de edad.

469. De las 3 PM a las 9 AM del día siguiente hay 18 horas, por tanto, si el primero adelanta un minuto cada dos horas tendrá las 9:09 AM y como el segundo se atrasa un minuto cada tres horas tendrá las 8:54 AM y la diferencia entre ambas será 9+6=15 minutos de diferencia entre los relojes.

470. Si tuviéramos 5 cajas con lápices, 4 con bolígrafos y dos con lápices y bolígrafos serían 11 cajas y no 10 como se plantea en el problema, por eso es que hay que tener presente que solo hay 5 cajas que contienen lápices, contando las dos que contienen lápices y bolígrafos, y de la misma forma con las de bolígrafos se cuentan las dos cajas de lápices y bolígrafos, luego serían 3 de lápices solos, dos de bolígrafos solos y dos de lápices y bolígrafos por tanto tenemos 7 cajas que contienen lápices o bolígrafos y nos quedan 3 cajas vacías.

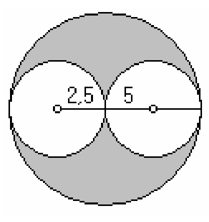
471. Al multiplicar cada número de dos cifras por 9 tenemos que estas van desde $10\cdot 9=90$ hasta $99\cdot 9=891$, luego los números que tienen sus cifras iguales y que están comprendido entre 90 y 891 son: 99,111,222,333, 444, 555, 666, 777 y 888 de todos ellos son divisibles por 9 solo el 99, 333 y 666, de aquí los números son $11\cdot 9=99$; $37\cdot 9=333$ y $74\cdot 9=666$.

472. a) Para que un número sea divisible por 2, debe ser un número par, por lo tanto *a* puede tomar cualquier valor y *b* los valores 0, 2, 4, 6 ó 8.
b) Un número es divisible por 3 cuando la suma de sus cifras básicas es un múltiplo de 3, en el número tenemos que $8+a+5+7\ +b$ tiene que ser un múltiplo de 3, luego $20+a+b$ tiene que ser múltiplo de 3, de aquí tenemos que:
Si *a* toma los valores 0, 3, 6 ó 9 entonces *b* debe tomar uno de los valores 1, 4 ó 7.
Si *a* toma los valores 1, 4, ó 7 entonces *b* debe tomar uno de los valores 0, 3, 6 ó 9.
Si *a* toma los valores 2, 5, ó 8 entonces *b* debe tomar los valores 2, 5 ó 8.
c) es divisible por 4, aquel número que sus dos últimas cifras de izquierda a derecha sean divisibles por cuatro, por lo tanto *a* puede tomar cualquier valor y *b* debe tomar los valores 2 ó 6.
d) para que sea divisible por 5 debe terminar en 0 ó 5 de ahí que *a* puede tomar cualquier valor y b los valores 0 ó 5.
e) un número es divisible por 9 cuando la suma de sus cifras básicas es un múltiplo de 9, luego de forma similar al inciso b) tenemos que: la suma de *a* y *b* tiene que dar 7 ó 16, es decir si *a* toma los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 entonces *b* debe tomar los valores 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 8, 7 y si *a* toma el valor 7, *b* debe tomar los valores 0 ó 9.

473. Sin comentarios el 99999.

474. Con una cara pintada quedan los de cada cara, descontando los que están en las aristas que tienen más de una cara pintada, por tanto serían $8\cdot 8=64$ por las 6 caras serían $64\cdot 6=384$ cubitos con una cara pintada. Con dos caras pintadas serán los de las aristas, excepto las de los vértices, luego serán $8\cdot 12=96$ con dos caras pintadas. Con 3 pintadas serán las de los vértices luego son 8 y los que no tienen caras pintadas son todos los interiores por lo que tenemos $8\cdot 8\cdot 8=8^3=512$.

475. Sale más agua por el tubo de 5cm de diámetro, pues tiene más superficie transversal como muestra la figura.



476. Siempre que se escogen 3 números se cumple que:

- Los tres números son pares y la suma de dos de ellos da un número par que es divisible por 2.
- Dos números son pares y uno impar y los dos pares dan un número par que es divisible por 2.
- Los tres impares, pero la suma de dos impares da un número par y es divisible por 2.
- Dos impares y uno par y de la misma forma dos impares dan un par y se puede dividir por 2.

Por lo tanto siempre es posible encontrar dos de ellos que su semisuma sea un número entero.

477. Consideremos que:
$x \rightarrow$ Puntos obtenidos por el primer dado.
$y \rightarrow$ Puntos obtenidos por el segundo dado.

$$x - y = 2 \qquad 2y = 2 \qquad x = 3y$$
$$\underline{x = 3y} \qquad y = 1 \qquad x = 3 \cdot 1$$
$$3y - y = 2 \qquad x = 3$$
$$\text{Entre los dos tienen } x + y = 3 + 1 = 4$$

R/ El jugador obtuvo 4 puntos en total.

478. Consideremos que:
$x \rightarrow$ Cantidad de juegos perdidos.

$$x + 8 + x = 30 \qquad 2x = 22$$
$$2x = 30 - 8 \qquad x = 11$$

R/ El equipo perdió 11 juegos.
Se puede plantear un sistema de ecuaciones y también se puede resolver por un tanteo inteligente.

479. Como cada persona da un regalo a cada una de las demás tenemos $12 \cdot 11 = 132$ regalos que se dan. Ahora, en el caso de abrazos es solo la mitad de los regalos porque el abrazo que da el primero al segundo, es el mismo que da el segundo al primero por tanto son 132:2=66 abrazos, tener en cuenta que en los regalos si son diferentes el que da el primero al segundo que el que da el segundo al primero.

480. Está claro que si 20 latas pesan 10kg entonces 10 latas pesan 5kg, de aquí que 30 latas pesen 15kg.

481. Aquí se comete el error de contestar que son 9cm, pensando que atraviesa desde el primero hasta el último tomo, pero de acuerdo a como se acomodan los libros la polilla tiene que atravesar el tomo II nada más, pues la portada del tomo I está pegada a la contraportada del tomo II y la portada del tomo II está pegada a la contraportada del tomo III por lo que la polilla atraviesa solo el tomo II, o sea 3cm es lo que debe recorrer.

482. El 6 se descompone en $3 \cdot 2$, por tanto es divisible por 6, por 2 y por 3. Ahora $n(n+1)(n+2)$ es el producto de tres números consecutivos y en tres números consecutivos al menos uno es par y al menos uno es múltiplo de 3 y por ende también es divisible por 6, por 3 y por 2. de aquí resulta que el producto que tenemos $6n(n+1)(n+2)$ es divisible por 36, por 9 y por 4 los cuales son cuadrados perfectos con lo que queda demostrado.

483. Como se quiere utilizar jaulas iguales y que quepa el mismo número de animales y que por supuesto a nadie se le ocurriría transportar gatos y perros juntos, entonces debemos determinar el $\text{M.C.D}(12,18) = 6$ por lo que en cada jaula deben ir 6 animales.

484. Si dividimos el número que dice uno de ellos por 3 obtenemos las veces que se han mencionado múltiplos de 3, es decir 192:3=64, al decir el 192 se ha pronunciado el 64 múltiplo de 3, ahora para determinar quien lo ha dicho, se divide el cociente obtenido entre los 3 niños que lo pronuncian y si da resto 1 lo dice el primer niño, si da resto 2 lo dice el segundo y si deja resto 0 lo dice el tercero, entonces 64:3=21 y deja resto 1, luego el número 192 lo dijo Esteban.

485. Con dos dígitos que su producto sea 48 son dos casos 68 y 86 es decir $P_2 = 2 \cdot 1 = 2$. Con tres dígitos son el 238, 246 y 344 con sus permutaciones es decir $2P_3 = 2 \cdot 6 = 12$ y $PR_{3,2} = \frac{3!}{2!} = 3$.
Ahora con cuatro dígitos son el 6222 y el 2234 y sus per-mutaciones, es decir $PR_{4,3} = \frac{4!}{3!} = 4$ y

$PR_{4,2}=\dfrac{4!}{2!}=\dfrac{4\cdot 3\cdot 2!}{2!}=12$ y con 5 dígitos que son 22223 y su permutación $PR_{5,4}=\dfrac{5!}{4!}=5$ por lo que en total serían 2+12+3+4+12+5=38 números que el producto de sus dígitos es 48 y ninguno es el dígito 1.

486. Ambos contaron el mismo número de transeúntes: el que estaba parado junto a la puerta contaba los transeúntes que marchaban en ambas direcciones, mientras el que andaba contaba todas las personas que se cruzaban con él, que eran las mismas que contaba el que estaba junto a la puerta.

487. El mayor denominador que tenemos es 12 que contiene a 2, 4, 6 y al 12; pero no contiene ni a 8 ni a 10 de aquí tenemos que: $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{6+3+2+1}{12}=\dfrac{12}{12}=1$ por lo tanto los términos que deben suprimirse son $\dfrac{1}{8}$ y $\dfrac{1}{10}$.

488. Considerando que:

$x \rightarrow$ Precio de la botella

$y \rightarrow$ Precio del tapón

1,00$=100 centavos

$$x+y=105$$
$$\underline{x=100+y}$$
$$100+y+y=105$$
$$2y=105-100$$

$$2y=5 \qquad x = 100 + y$$
$$y=5:2 \qquad x = 100 + 2{,}5$$
$$y=2{,}5 \qquad x = 102{,}5$$

R/ El tapón vale dos centavos y medio y la botella un peso con dos centavos y medio.

489. *Una vía*: Descomponer el número 194040 en factores primos; por tanto 194040 $=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7^2\cdot 11$, para que sea un cubo perfecto hay que multiplicarlo por: $3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11^2=3\cdot 25\cdot 7\cdot 121=63525$, Ese es el N buscado, de aquí tenemos que:

$$\sqrt{\frac{63525}{21}}=55\Rightarrow\sqrt{3025}=55\Rightarrow 55=55$$

Otra vía: Partir de lo que se cumple:

$$\sqrt{\frac{N}{21}}=55 \text{ elevando al cuadrado}$$
$$\frac{N}{21}=3025\Rightarrow N=3025\cdot 21\Rightarrow N=63525$$

Y este es el número buscado.

490. Designemos por *x* la fracción que falta, entonces se cumple que:

$$\frac{\frac{6}{5}+\frac{3}{2}+x}{3}=1$$
$$\frac{6}{5}+\frac{3}{2}+x=3 \quad / \ \cdot 10$$

$$12+15+10\cdot x=30$$
$$10\cdot x=30-27$$
$$10\cdot x=3$$
$$x=\frac{3}{10}$$

La otra fracción es $\dfrac{3}{10}$.

491. Cada docena tiene 12 naranjas y tres cuartas partes de una docena será $\dfrac{3}{4}\cdot 12=9$ naranjas; por lo tanto en dos docenas y tres cuartos de docenas tenemos $12\cdot 2+9=33$ naranjas.

492. Contiene más helado cinco bolas de 6cm de diámetro, pues el volumen depende del diámetro y siempre se cumple que:

$5\cdot 6^3 > 6\cdot 5^3 \quad / :(5\cdot 6) \Rightarrow \quad 6^2 > 5^2 \Rightarrow \; 36 > 25$

Por lo tanto contiene más helado 5 bolas de 6cm de diámetro cada una.

493. Se sacaría de la que dice "*naranjas y mandarinas*" pues, por ejemplo si saca una mandarina, esa caja es de mandarina, la que dice "*naranja*" es naranjas y mandarinas y la que dice "*mandarinas*" es naranja, de igual forma si se saca una naranja esa caja sería de naranjas, la que dice "*mandarinas*" sería de naranjas y mandarinas y la que dice "*naranjas*" será de mandarina.

494. No es necesario reconocer de quien es el perro, lo importante es saber que el perro corrió de un lugar a otro sin detenerse y a una velocidad constante de 15km por hora. Además el segundo caminante disminuye la distancia con el primero en 2km cada hora y como la diferencia es de 8km el segundo necesita 4 horas para darle alcance al primero, ese es el tiempo que estaba corriendo el perro a una velocidad de 15km por hora, por lo tanto el perro recorrió 4·15 = 60km que es lo que teníamos que determinar.

495. Como las casillas que más vecinos tienen son las del centro y a su vez los números que menos consecutivos tienen son el primero y el último estos son los que colocamos en las casillas centrales. Al lado del primero colocamos el consecutivo del último y al lado del último el consecutivo del primero. En el extremo superior colocamos dos números impares (o pares) y en los inferiores colocamos los pares (o impares) para lograr que no existan dos números consecutivos en casillas vecinas. Ver figuras.

	4	6	
7	1	8	2
	3	5	

	5	3	
2	8	1	7
	6	4	

496. Para resolver este problema se puede partir de atrás hacia delante, y como se pide el menor número de plátanos, al repartir en partes iguales se da uno a cada uno es decir 3. como el segundo marinero se comió las $\frac{2}{3}$ partes se comió 6 plátano y había 9, al darle 2 al mono tenía 11, y como el primero se comió la mitad se comió 11 y había 22 y dos que le dio al mono eran 24 plátanos al principio.

También se puede realizar apoyándonos en el álgebra.

Sea: *x* la cantidad de plátanos

Se le dan dos al mono. Quedan *x*-2

El primer marinero se come $\frac{x-2}{2}$

Quedan $x-2-\frac{x-2}{2}=\frac{2x-4-x+2}{2}=\frac{x-2}{2}$

Se da al mono 2. Quedan $\frac{x-2}{2}-2=\frac{x-2-4}{2}=\frac{x-6}{2}$

Segundo marinero $\frac{2}{3}\left(\frac{x-6}{2}\right)=\frac{x-6}{3}$

Quedan: $\frac{x-6}{2}-\frac{x-6}{3}=\frac{3x-18-2x+12}{6}=\frac{x-6}{6}$

se reparten entre los tres tocando: $\frac{x-6}{6}:3=\frac{x-6}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{x-6}{18}$

y como a cada uno se le da la misma parte y es la menor entonces

$\frac{x-6}{18}=1 \Rightarrow x-6=18 \Rightarrow x=18+6 \Rightarrow x=24$

El menor número de plátanos que se podía haber recogido al principio es 24 plátanos.

497. Como ha completado los $\frac{3}{5}$, lo que le faltan son los $\frac{2}{5}$ y para completar $\frac{1}{4}$ de los que le faltan, necesita 36 sellos de aquí que:
x es el total de sellos

$$\frac{1}{4}\left(\frac{2\cdot x}{5}\right)=\frac{x}{10} \qquad \frac{x}{10}=36$$
$$x=360$$

El álbum debe contener 360 sellos en total.
Se puede comprobar que:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{3}{5}\cdot 360=216\\ \frac{2}{5}\cdot 360=144\end{array}\right\}\Rightarrow 216+144=360$$

498. Denotemos los tres números pares consecutivos por
$2n-2, 2n$ y $2n+2$ entonces:

$$2n-2+2n+2n+2=72 \qquad 2n=72:3$$
$$3\cdot 2n=72 \qquad 2n=24$$

De aquí los números son 22, 24 y 26 y el producto de sus extremos es 572.

499. Primero necesitamos conocer el precio de los relojes, pero como nos dicen que él puede comprar 60 relojes y 50 pulseras ó 50 relojes y 60 pulseras (con el mismo dinero) esto solo es posible cuando los relojes y las pulseras cuesten lo mismo, es decir 5 pesos cada uno.
Esto se puede determinar:
y es el precio de los relojes

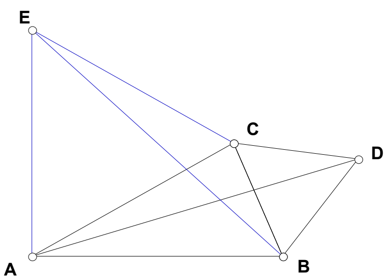
$$60y+50\cdot 5=60\cdot 5+50y\Rightarrow 10y=10\cdot 5\Rightarrow y=5$$

Por lo tanto el joyero dispone de $60\cdot 5+50\cdot 5=550$.
R/ El joyero posee 550 pesos.

500. Si se hace un análisis detallado del problema se puede determinar que el área de la región sombreada son 4 sectores circulares del mismo radio y que la suma de la amplitud de los ángulos de estos sectores da una circunferencia completa de radio uno, por tanto podemos calcular el área del círculo, que es el área de la región sombreada que buscamos:

$$Ars=\pi\cdot r^2$$
$$Ars=\pi\cdot 1$$ El área de la región sombreada es πu^2.
$$Ars=\pi.u^2$$

501. Utilizando la regla heurística de realizar una construcción auxiliar tenemos: construir un ΔACE equilátero sobre el lado $\overline{\text{AC}}$ y trazar el segmento $\overline{EB}$. Ahora hemos obtenido el ΔBAE rectángulo en A, pues $\angle$BAC = 30^0 por datos y el $\angle\text{CAE}=60^0$ por ser un ángulo interior de un triángulo equilátero; de aquí como nos piden probar si con $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ se puede construir un triángulo rectángulo, tenemos que $\overline{AB}$ es un lado de ese triángulo rectángulo, además $\overline{AE}=\overline{AC}$ por ser lados de un triángulo equilátero, por lo que ya tenemos dos de los lados de un triángulo rectángulo; solo nos falta ver si $\overline{AD}$ puede ser la hipotenusa, es decir que hemos transformado el problema inicial y lo que necesitamos es saber si $\overline{AD}=\overline{BF}$, si logramos demostrar esto, ya hemos resuelto el problema inicial. Aplicando otra regla heurística: para determinar si dos segmentos son iguales se debe buscar un par de triángulos que contengan a estos lados. Tratemos de demostrar que los ΔABC y ΔACD son iguales:



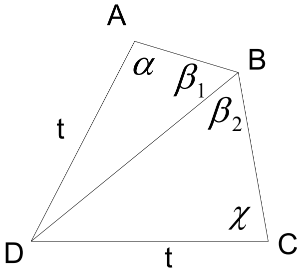
$\overline{EC}=\overline{AC}$ por ser lados del ΔACE equilátero
$\overline{CB}=\overline{CD}$ por ser lados del ΔBDC equilátero

$\angle BCE = \angle ACD$ por suma de ángulos, es decir:

$$\left.\begin{array}{l}\angle ECA + \angle ACB = \angle ECB \\ \angle DCB + \angle ACB = \angle DCA\end{array}\right\}\text{suma de ángulos}$$

Ahora $\angle ECA = \angle DCB = 60^0$ por ser ángulos de triángulos equiláteros por tanto: $\left.\begin{array}{l}60^0 + \angle ACB = \angle ECB \\ 60^0 + \angle ACB = \angle DCA\end{array}\right\}$ y como los miembros izquierdos son iguales entonces los miembros derechos también son iguales y $\angle BCE = \angle ACD$ por transitiva. Por tanto el $\Delta BEC = \Delta ACD$ por el teorema l.a.l. y como los triángulos son iguales, los elementos homólogos también son iguales y $\overline{EC} = \overline{AC}$ luego podemos concluir que con los lados $\overline{AB}, \overline{AC}.y.\overline{AD}$ se puede construir un triángulo rectángulo siempre.

502. Para expresar a $\overline{DB}$ en función de *t*. Hagamos las siguientes consideraciones: Supongamos que: $\overline{DB} > t$ entonces, se tiene que (1) $\begin{cases}\alpha > \beta_1 \\ \chi > \beta_2\end{cases}$ pues en un mismo triángulo $\begin{cases}\Delta ABD \\ \Delta BCD\end{cases}$ a mayor lado se opone mayor ángulo. Sumando miembro a miembro (1) tenemos $\alpha + \chi > \beta_1 + \beta_2$ pero $\beta_1 + \beta_2 = \beta$ por suma de ángulos



Entonces se cumple que: (2) $\alpha + \chi > \beta$ lo que contradice la condición del problema (3) $\alpha + \chi = \beta$ por lo tanto $\overline{DB}$ no puede ser mayor que *t*.

Supongamos que $\overline{DB} < t$ entonces: (4) $\begin{cases}\alpha < \beta_1 \\ \chi < \beta_2\end{cases}$ porque en un mismo triángulo $\begin{cases}\Delta ABD \\ \Delta BCD\end{cases}$ a menor lado se opone menor ángulo. Sumando miembro a miembro (4) tenemos $\alpha + \chi < \beta_1 + \beta_2$ y por (2) $\alpha + \chi < \beta$ lo que está en contradicción con (3), por lo tanto $\overline{DB}$ no puede ser menor que *t*.

Y como $\overline{DB}$ no pede ser menor ni mayor que *t*, entonces podemos concluir que $\overline{DB} = t$.

503. Los datos que nos dan están en diferentes unidades por lo que debemos llevarlas a una misma unidad, por ejemplo llevémoslos todos a cm, y tenemos que:
54cm = 54cm
1,5m = 150cm
8dm = 80cm
Ahora calculemos la longitud de la circunferencia que describe cada rueda. ($L_a=\pi\cdot d$).
$L_1=\pi\cdot 54cm$ $L_2=\pi\cdot 150cm$ $L_3=\pi\cdot 80cm$
Determinemos el m.c.m($54\pi;150\pi;80\pi$)=$2^4\cdot 3^3\cdot 5\pi=10800\pi$
$10800\pi cm = 108\pi m$.
R/ El tractor debe recorrer $108\pi m$ para que todas las ruedas vuelvan a la posición inicial.

504. Para determinar el área de la superficie sombreada, es suficiente determinar el área de los tres cuadrados y restarle el área del triángulo rectángulo formado.
$A_{\square 1}=5^2 =25cm^2$ $A_{\square 2}=4^2 =16cm^2$ $A_{\square 3}=3^2 =9cm^2$
$A_{\square T}= A_{\square 1} + A_{\square 2} + A_{\square 3}$
$A_{\square T} = 25 + 16 +9 = 50\ cm^2$.
Para calcular el área del triángulo rectángulo tenemos que analizar que un cateto tiene 5cm de longitud y el otro la suma de los lados de los tres cuadrados, es decir 5 + 4 +3 =12cm.

$$A_\Delta = \frac{5\cdot 12}{2} = 30cm^2 .$$

$A_{RS} = A_{\square T} - A_\Delta$

$A_{RS} =$ 50 cm^2 – 30 cm^2

$A_{RS} =$20 cm^2.

R/ La superficie de la región sombreada es de 20 cm^2.

505. Como el terreno que se debe dividir para los 4 hijos aparece dividido en cuadraditos se hace mucho más fácil llegar a la solución, pues son 12 cuadraditos para repartir entre 4 personas, por lo que tocan a 3 cuadraditos, y como tienen que ser iguales y de la mima forma, los colocamos formando una L como muestra la figura.

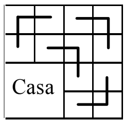


fig 1

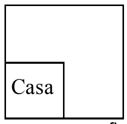


fig 2

Este ejercicio se podría complicar un poco más si se le pide lo mismo pero mostrándolo como aparece en la figura 2.

506. Para conocer el volumen de lo que queda se debe calcular el volumen del cubo (ya lo conocemos es V) y restárselo al volumen de las 8 pirámides que se quitan, por lo que como son iguales, es suficiente calcular el volumen de una de ellas y multiplicarlo por 8.
Para calcular el volumen de un cubo debemos partir por conocer sus aristas, es decir expresar sus aristas en función de V.

$V = a^3$, $a = \sqrt[3]{V}$

El volumen de la pirámide (V_P) es $V_P = \dfrac{A_B \cdot h}{3}$.

La base es un triángulo rectángulo isósceles de lado $\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{V}$ y su área es $A_B = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt[3]{V} \cdot \frac{1}{2}\sqrt[3]{V}}{2} = \dfrac{1}{8}\sqrt[3]{V^2}$ y la altura es $\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{V}$, por lo tanto el volumen de la pirámide es:

$V_P = \dfrac{\frac{1}{8}\sqrt[3]{V^2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt[3]{V}}{3} = \dfrac{\frac{1}{16}V}{3} = \dfrac{1}{48}V$, como son 8 pirámides, entonces el volumen es: $V_{P8} = 8 \cdot \dfrac{1}{48}V = \dfrac{1}{6}V$

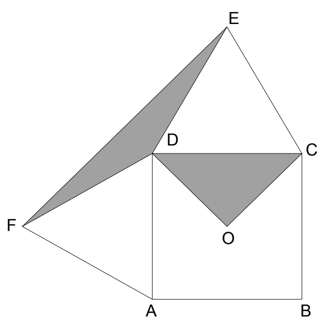
El volumen del cuerpo que queda (V_R) es igual a la diferencia del volumen del cubo menos el volumen de las 8 pirámides y tenemos $V_R = V - \dfrac{1}{6}V = \dfrac{6V - V}{6} = \dfrac{5}{6}V$.

El volumen del cuerpo que queda es de $\dfrac{5}{6}V$ u^3.

507. Para conocer la menor cantidad de huevos que hay en la caja, es suficiente determinar el $\text{m.c.m.}(2,3,5,7) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ y sumarle 1, es decir el menor número de huevos que puede haber en la caja es 211 y que al dividirlo por 2, 3, 5 ó 7 siempre deja resto 1.

508. Los ΔOTB y ΔOPT tienen la misma área (tienen base $\overline{OT}$ y altura $\overline{OP} = \overline{NB}$ iguales). Como T es punto medio de $\overline{PB}$, los ΔBNT y ΔOTP son iguales por el teorema de igualdad de triángulos (a.l.a.) (el $\angle O = \angle N$, $\overline{PT} = \overline{TB}$ y $\angle PTO = \angle NTB$). Por tanto los ΔOTB, ΔOPT y ΔTNB tienen por área $1u^2$; el ΔBON tiene por área $2u^2$ y como es la octava parte del rectángulo, este tiene $16u^2$ de área.

509. *Son iguales*. Pues se tiene que:



$A_{\Delta FDE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{FD} \cdot \overline{DE} \cdot sen150^0$

$A_{\Delta FDE} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{1}{2}$

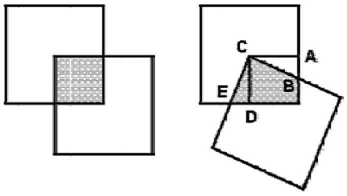
$A_{\Delta FDE} = \frac{1}{4} \cdot a^2$

$A_{\Delta COD} = \frac{1}{2}\cdot \overline{OD}\cdot \overline{OC}$

$A_{\Delta COD} = \frac{1}{2}\cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a\cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a$

$A_{\Delta COD} = \frac{1}{4}\cdot a^2$

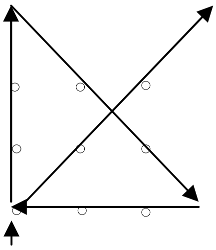
510. El área comprendida entre ambos siempre es la cuarta parte de uno de los cuadrados, en el primer caso es evidente, en el segundo los triángulos ΔABC y ΔCDE son iguales por el criterio a.l.a.



($\angle A = \angle D, \overline{AC} = \overline{CD}, \angle ACB = \angle DCE$)

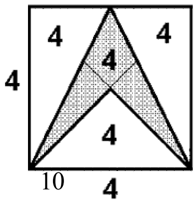
511. Generalmente se responde incorrectamente al decir que el que llegó tarde tiene que devolverle 10 centavos al otro, pues si le devuelve 10 centavos él se queda con 40 y el otro toma 60 y entonces gana 20 centavos más que él y esta no es la condición del problema, por lo tanto el que llegó tarde tiene que devolverle al otro 5 centavos, entonces él se queda con 45 y el otro se queda con 55 y gana 10 centavos más que el que llegó tarde, y esta respuesta si cumple las exigencias del problema.

512. Muy fácil, sigue la flecha como muestra la figura.



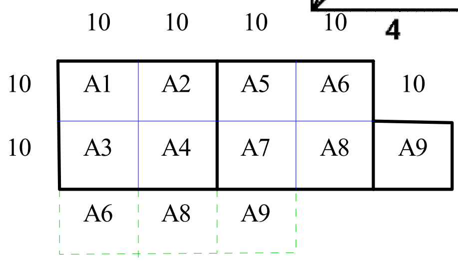
513. Los que responden que 12 minutos están equivocados pues es suficiente con 9 minutos, de la siguiente forma: se ponen dos hamburguesas por una cara (3 minutos); se vira una, se saca la otra y se pone a freír la que quedo fuera (3 minutos); se saca la que está frita completa, se vira la otra y se pone la que esta afuera por la cara que no se ha frito (3 minutos); al terminar quedan fritas las tres hamburguesas y solo se emplean 3+3+3=9 minutos para ello.

514. Es la cuarta parte del área del cuadrado: 16/4 = 4. Como se muestra en la figura.



515. Como un lote es de 10m de lado su área sería de 100m^2 y los dos lotes de 20m cada uno, tendrían un área de $2\cdot 20^2 = 800$m^2, por lo tanto él tendría en total 900m^2 de terreno y como 900m^2 es un cuadrado perfecto su raíz es 30m, que será el lado del nuevo lote.

Otra forma de proceder sería que: Se toman los lotes de 20m y se dividen en 4 lotes de 10 m cada uno, con lo que se obtendrían 8 lotes de 10 m de lado más el que tenían serían en total 9 lotes de 10 m cada uno y con 9 lotes de 10 m de lado se puede formar un nuevo lote de 3 cuadrados por cada lado y como cada cuadrado tiene 10 m de lado el nuevo lote tendrá 10·3=30 m.



516. Muchas personas contestan que se ganó 70 centavos, pues consideran que ella perdió 40 centavos al comprar el libro el segundo día. Pero realmente el ejercicio nos pregunta cuánto gana, no importa lo que invierte; por lo tanto en realidad se ganó \$1,10, pues el primer día ganó 39,60-39,00=\$0,60 y el segundo ganó 40,50-40,00=\$0,50 y en total ganó \$0,60+\$0,50=\$1,10.
Supongamos que Alicia compra 2 libros (uno a \$39,00 y otro a \$40,00) y los vende a \$39,60 y \$40,50 respectivamente, por lo tanto se gana \$1,10.

517. Para resolver este problema se debe reconocer que en el miembro izquierdo aparece una diferencia de cuadrados y procedemos de la siguiente forma:

$$\left(10^{1999}+25\right)^2-\left(10^{199}-25\right)^2=10^n$$

$$\left(10^{1999}+25-10^{1999}+25\right)\left(10^{1999}+25+10^{1999}-25\right)=10^n$$

$50\cdot 2\cdot 10^{1999}=10^n \qquad 10^2\cdot 10^{1999}=10^n \qquad 10^{2001}=10^n$

$100\cdot 10^{1999}=10^n \qquad 10^{1999+2}=10^n \qquad n=2001$

518. Se puede proceder, suponiendo que el que tiene la menor hora, sea el que está atrasado y el que tiene la mayor hora el que está adelantado, para constatar si a partir de esta suposición llegamos a determinar la hora exacta. Como el que está atrasado tiene 1 hora y 20 minutos de atraso entonces serían 1:50+1:20=3:10; y el que está adelantado tiene 50 minutos de adelanto, entonces sería 4:00-0:50=3:10 que es la hora exacta. Por lo tanto serían las 3:10 y el que está roto es el que marca las 2:10.

519. Hoy es lunes, pues el día siguiente de pasado mañana es jueves y de jueves a domingo hay tres días; además ayer (domingo) está tan lejos de pasado mañana, que es miércoles (de domingo a miércoles hay tres días), como el jueves lo está del domingo. Por lo tanto hoy es lunes.

520. Como llovió 7 veces entre mañanas y tardes, además hubo 6 mañanas claras y 5 tardes claras en total nos da 7+6+5=18 tardes y mañanas y al dividir por 2 nos dará la cantidad de días que salió Ernesto de vacaciones, es decir 18:2 = 9 días.

Otra vía: Consideremos que:

$x \rightarrow$ días que salió de vacaciones

6 mañanas claras

5 tardes claras $\qquad x - 6 + x - 5 = 7$

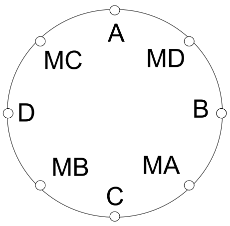
7 días que llovió $\qquad 2x - 11 = 7$

$x - 6$ mañanas que llovió $\qquad 2x = 18$

$x - 5$ tardes que llovió $\qquad x = 9$

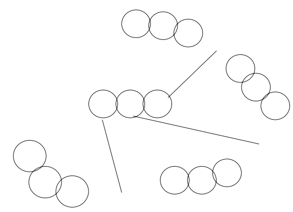
R/ Ernesto salió 9 días de vacaciones.

521. Se debe partir del análisis de cada una de las situaciones planteadas, por ejemplo: como no hay 2 hombres juntos, se tiene que sentar un hombre y una mujer, además ninguno se sentó al lado de su pareja, por lo que no pueden sentarse una persona y su pareja a continuación, como Alberto (A) se sentó al frente de Carlos (C), entonces la mujer de Alberto (MA) debe estar al lado de Carlos y la de Carlos al lado de Alberto y como a la derecha de la mujer de Alberto se sentó Bernardo (B) entonces al frente de Bernardo se sentó Diego (D) y la mujer de Diego (MD) debe sentarse entre Alberto y Bernardo y entonces entre Alberto y Diego tiene que sentarse la mujer de Carlos (MC).

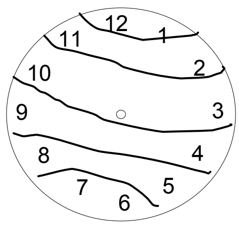


522. Existe la misma cantidad de agua en la jarra que de vino en el cubo, pues después de la operación de trasvase en ambas vasijas hay 2 litros de líquido, por lo tanto en la jarra de vino existe un volumen de agua que es necesariamente igual al volumen de vino que hay en el cubo de agua, para mantener 2 litros de líquido en cada uno de los recipientes.

523. Son varias las personas que contestan que son 4 eslabones, pero no es así, pues basta con abrir los 3 eslabones de un trozo de cadena y con cada eslabón de los abiertos se enlazan dos de los tres restantes formando una cadena continua.



524. Para resolver este problema debemos partir que la esfera del reloj tiene una sucesión de números naturales del 1 hasta el 12, como tenemos una cantidad par de números, entonces la suma del primero y el último (1+12=13) nos da un valor igual al segundo y el penúltimo (2+11=13), e igual al tercero y el antepenúltimo (3+10=13) y así sucesivamente (4+9=13), (5+8=13), (6+7=13). Luego la esfera del reloj se puede dividir en 6 partes de tal forma que todos sumen la misma cantidad 13 como indica la figura. Como la suma de $1+2+3+\cdots+12=\frac{12\cdot 13}{2}=78$ los números de cada una de las partes debe sumar 78:6=13



525. Como el interruptor A enciende los $\frac{3}{5}$ de los bombillos, el B enciende los $\frac{2}{5}$ que es el resto, y aquí que los $\frac{2}{5}$ de 30 es $\frac{2}{5}\cdot 30=12$ bombillos que encienden cuando accionamos el interruptor B.

526. Para que puedan pasar los 4 a la otra orilla, primero deben pasar los 2 niños, uno se queda en la otra orilla y el otro regresa, luego cruza un hombre, se queda en la otra orilla, el niño regresa al lugar inicial, cruzan los 2 niños, se queda uno y regresa el otro, cruza el otro hombre, se quedan los 2 hombres en la otra orilla y regresa el niño, cruzan los 2 niños y han pasado los 4 a la otra orilla cruzando 9 veces el río: 5 veces de ida y 4 de regreso como se explicó.

527. El hijo de Nicolás se llama Pedro, pues si sumamos la cantidad de peces capturados por las 4 personas nos dará 2+3+3+4=12 y este no es un cuadrado perfecto, pues termina en 2 y los cuadrados perfectos terminan en 0, 1, 4, 5, 6 ó 9, sin embargo, considerando que son 3 las personas, es decir: el abuelo, el hijo y el nieto, entonces la suma será 2+3+4=9 que si es un cuadrado perfecto.

528. Tenemos que:

$$\begin{array}{l} 10^2 = \quad 100 \\ 10^3 = \quad 1000 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ 10^{10} = 10000000000 \\ \hline \qquad 11111111100 \end{array}$$

Los ceros nos lo da la expresión 10^2, por lo que tenemos que: $\left(10^2\right)^{1999} = 10^{3988}$ por lo tanto en la expresión dada aparecen 3988 ceros.

529. Es necesario determinar el m.c.m.(18;21;28)=$2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$=252 es decir que las 3 lámparas coinciden cada 252 segundos y como una hora tiene 3600 segundos, en esa hora las lámparas coincidirán en 3600:252≈14 veces, más la inicial son 15 veces en una hora.

530. Considerando que:

a→ numerador de la fracción

b→ denominador de la fracción

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{10} \qquad\qquad a + b = \{16,25,36,49,64,81\}$$

$$10a = 4b$$

$$10a - 4b = 0 / :2$$

$$5a - 2b = 0$$

$$a + b = \{\ \} / \cdot 2$$

$$5a - 2b = 0$$

$$2a + 2b = 2\{\ \}$$

$$7a = 2\{\ \}$$

$$a = \frac{2 \cdot \{\ \}}{7}$$

De los cuadrados perfectos de dos cifras el único que es divisible por 7 es el 49.

$$a = \frac{2 \cdot 49}{7}$$

$$a = 2 \cdot 7$$

$$a = 14$$

$$5a - 2b = 0$$

$$5 \cdot 14 = 2b$$

$$b = \frac{5 \cdot 14}{2}$$

$$b = 35$$

La fracción será $\frac{14}{35}$.

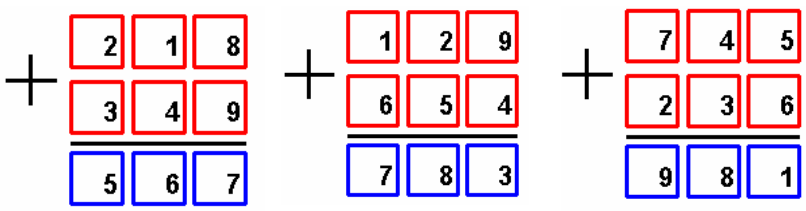
531. Al dividir cualquier número natural por 4 este deja resto 0, 1, 2 ó 3; si dos o más dejan el mismo resto, el problema está probado, pero analicemos el caso extremo en que tomamos 4 números que dejan restos distintos, pero al tomar el quinto cualquiera sea este, tiene necesariamente que dejar el mismo resto que alguno de los anteriores, pues son los únicos restos que se pueden obtener al dividir por 4.

532. Representemos por a, b, c, d, e, f, g, h, i los distintos dígitos del 1 al 9, aunque no necesariamente en ese orden.

$$\begin{array}{rccc} & \boxed{a} & \boxed{b} & \boxed{c} \\ + & \boxed{d} & \boxed{e} & \boxed{f} \\ \hline & \boxed{g} & \boxed{h} & \boxed{i} \end{array}$$

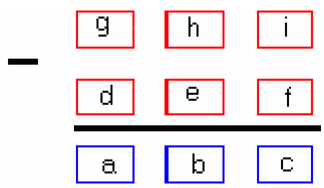
En esta suma tenemos cuatro casos posibles:

(1) c + f = i, b + e = h, a + d = g
(2) c + f = i, b + e = 10 + h,
 (a + 1) + d = g
(3) c + f = 10 + i, (b+1) + e = h, a + d = g
(4) c + f = 10 + i, (b+1) + e = 10 + h, (a+1) + d = g
Además sabemos que:
(5) a + b + c + d + e + f + g + h + i = 45
Llamando:
x = a + b + c, y = d + e + f, z = g + h + i
Podemos escribir (5) como:
(6) $x + y = 45 - z$
Los casos (1) y (4) se descartan, puesto que:
Sumando en (1), tendríamos:
 (a + b + c) + (d + e + f) = (g + h + i),
Es decir:
 $x + y = z$, pero aplicando (6) quedaría:
 $z = 45 - z$
$2z = 45$ (z no es entero, por tanto es imposible)
De manera similar se puede deducir de (4) y (6), que 2z = 27, lo cual significaría que z no es entero y por tanto es imposible.
Los casos (2) y (3) si son posibles, puesto que:
Sumando en (2) y sustituyendo los valores de x, y, z, tendríamos:
 $x + y + 1 = z + 10$
Sustituyendo (6), nos queda: $z + 9 = 45 - z \Rightarrow z = 18$ (posible solución)
De manera similar se puede deducir de (3) y (6), que z = 18 (posible solución)
De aquí tenemos la conclusión de que:
Las soluciones son todas aquellas, donde la suma de los dígitos de la suma, sean 18.
Algunas de las posibles soluciones son:

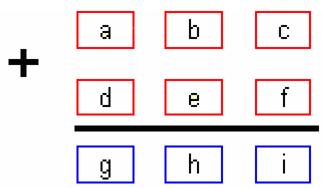


Existen otros casos que dejamos a disposición del lector.

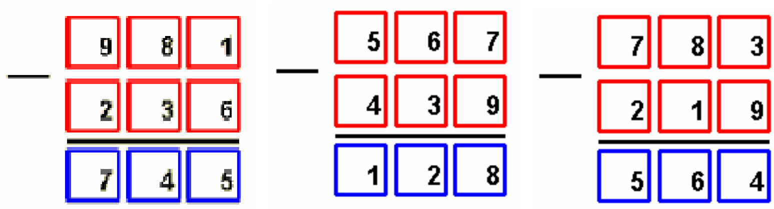
533. Representemos por a, b, c, d, e, f, g, h, i los distintos dígitos del 1 al 9, aunque no necesariamente en ese orden.



Decir que el primer renglón, menos el segundo sea igual al tercero, es equivalente a decir que:
La suma del tercer renglón mas el segundo sea igual al primero.



Entonces para resolver este problema te recomendamos ver las sugerencias dadas en el problema anterior.
De esas sugerencias podemos concluir que:
Las soluciones son todas aquellas, en donde los dígitos del minuendo suman 18.
Algunas de las posibles soluciones son:



Existen otros casos que dejamos a disposición del lector.

534. Una forma de hacerlo es como muestra la tabla:

1	2	3	4	5	6
6	1	2	3	4	5
5	6	1	2	3	4
4	5	6	1	2	3
3	4	5	6	1	2
2	3	4	5	6	1

535. Descomponemos el número $8n^3$-$2n$ en factores primos:

$2n{\cdot}(4n^2 - 1)$ se extrae factor común

$2n{\cdot}(2n+1)(2n-1)$ se resuelve la diferencia de cuadrados $(2n-1)(2n)(2n+1)$ se ordena. Aquí tenemos tres números consecutivos y conocemos que en tres números consecutivos existe al menos uno par (divisible por 2), y al menos uno es divisible por 3, por lo tanto el número dado es divisible por 6.

536. Aparentemente parece imposible, pero si calculamos la diagonal de la ventana, utilizando Pitágoras tenemos:

$3^2 + 4^2 = x^2 \Rightarrow 9 + 16 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{25} \Rightarrow x = 5\text{m}$

Su diagonal tiene 5m y la plancha de cristal tiene un lado de 5m y por tanto se puede pasar la plancha por la ventana.

537. Lo primero que debemos hacer es reconocer cuáles son los primeros nueve múltiplos de 3.

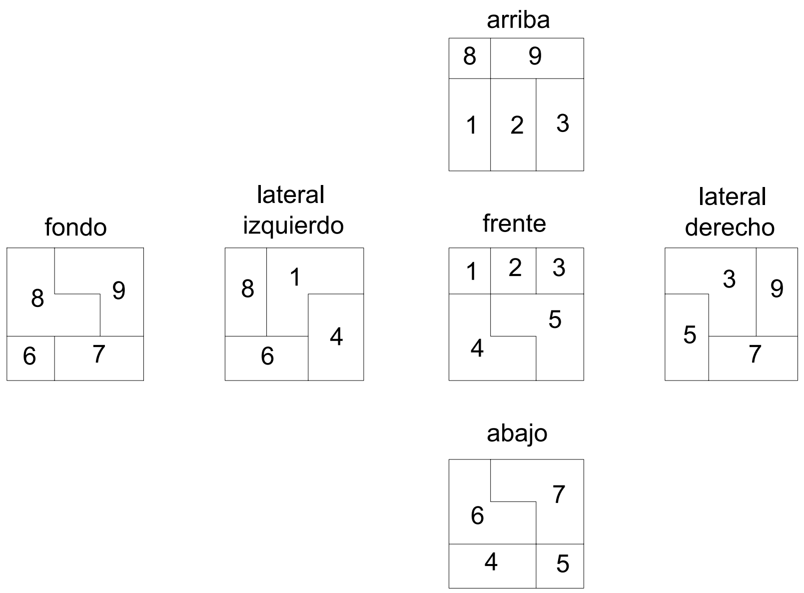
M= {3,6,9,12,15,18,21,24,27}

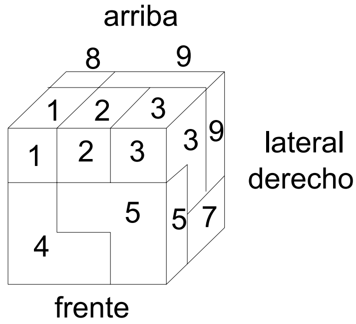
Reconocer que el del medio es 15 y los otros combinarlos convenientemente para que su suma en horizontal, vertical y diagonal sea 45, una posible solución es la que aparece en la tabla.

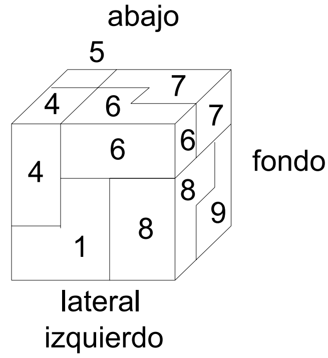
12	27	6
9	15	21
24	3	18

538. Como lo que se tiene que formar es un cubo, necesitamos buscar cuál es el cubo más pequeño que se puede construir, utilizando la menor cantidad de piezas; el cubo no puede ser de 1 unidad por la forma de la pieza, de igual forma no puede ser de lado 2, ahora ¿será posible un cubo de lado 3 utilizando estas piezas? Pues sí, como cada pieza está formada por 3 cubitos, se pueden acomodar convenientemente 9 piezas para formar un cubo que contenga 27 cubitos de 1 cm cada uno. Ese es el menor cubo que se puede formar con 9 piezas de lado 3cm (3·1cm). Tratamos de ilustrar cómo queda el cubo representando la vista de cada una de las caras del cubo.

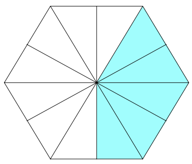
Los siguientes cubos que se pueden construir serán ubicando 8 cubos iguales al anterior, es decir un cubo de 6cm (3·2cm) de arista y de $9{\cdot}8=9{\cdot}2^3=72$ piezas, el tercero sería ubicando 27 cubos iguales al primero y obtenemos un cubo de 9cm (3·3cm) de arista y de $9{\cdot}27=9{\cdot}3^3=243$ piezas, el cuarto cubo sería ubicando 64 cubos iguales al primero, y obtenemos un cubo de 12 cm (3·4cm) de arista y de $9{\cdot}64=9{\cdot}4^3=576$ piezas; así sucesivamente podemos concluir que los cubos que se pueden construir deben tener de arista $n = 3{\cdot}k$ y $9{\cdot}k^3$ piezas, donde k es un número natural distinto de cero.





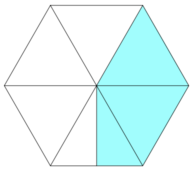


539. Partiendo de que es un hexágono regular, podemos trazarle cuatro ejes más de simetría y el hexágono queda dividido en 12 partes iguales de las cuales 5 están sombreadas, por lo tanto la región sombreada representa el $\frac{5}{12}$ del hexágono.

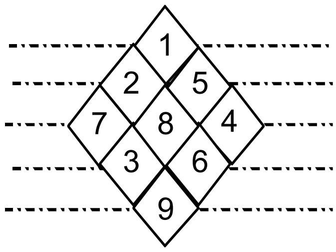


Otra vía.

Como todo hexágono regular se puede dividir en 6 triángulos equiláteros iguales y la región sombreada es equivalente al área de dos triángulos y medios, entonces la fracción que representa el área sombreada será: $\frac{2\frac{1}{2}}{6}=\frac{\frac{5}{2}}{6}=\frac{5}{12}$ del área del hexágono.



540. Solo existen 3 cuadrados perfectos de una cifra que son: 1, 4 y 9, tomemos 1 y 9, de dos cifras son seis pero no podemos tomar los que tengan 1, 9, ni 4 es decir solo tenemos 25 y 36, y nos queda uno que termina en 4 de tres cifras y que contenga al 7 y el 8 y ese número es el 784 que es el cuadrado de 28.



541. Suponiendo que el número de pelos de una persona sea ***n*** y la cantidad de personas sea ***m*** (con ***m > n+1***) y que cada persona tenga un número diferente de pelo, entonces las ***n+1*** primeras personas pueden tener un número diferente de pelos (incluyendo el calvo total, con cero pelo); ahora a partir de la persona ***n+2*** tiene que tener necesariamente la misma cantidad de pelos que alguna de las ***n+1*** personas anteriores.

542. El doble de 3*x* es, 3 quiere decir que: $2\cdot 3x=3\Rightarrow \quad x=\frac{3}{6}\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ Y el doble de 2*y* es 2, quiere decir que:

$4y=2\Rightarrow y=\frac{1}{2}$ Por tanto el doble de $x{\cdot}y$ es $2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

543. Para resolver el problema nos apoyaremos en una tabla de valores de verdad y lo diferenciaremos en casos.

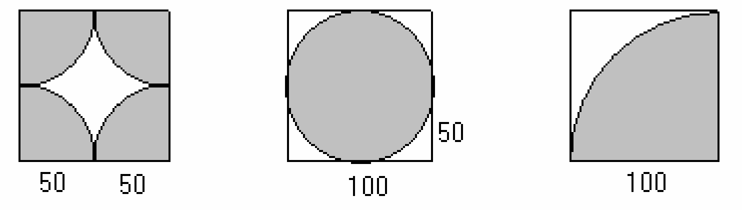
Caso I: Si Alberto es caimán, entonces Bernardo es caimán y Carlos es una rana, Daniel es un caimán y Elena es una rana, pero como Elena plantea que Alberto no es una rana y eso es verdad, entra en contradicción con que ella es rana y dice mentira, por lo tanto no es posible este caso.

Caso II: Si Alberto es una rana, entonces Bernardo es una rana, Carlos es un caimán, Daniel es una rana y Elena también es una rana lo cual se ve claro al decir que Alberto no es una rana y como no aparece ninguna contradicción esta es la solución, es decir existen 4 ranas.

Nombres	Caso I	Caso II
Alberto	Caimán	Rana
Bernardo	Caimán	Rana
Carlos	Rana	Caimán
Daniel	Caimán	Rana

Elena	Rana	Rana

544. Si una gallina pone 2 huevos en tres días, entonces 4 gallinas pondrían 8 huevos en tres días, luego para que 4 gallinas pongan 24 huevos necesitan tres veces el tiempo que necesitan para poner 8 huevos (3 días), es decir 3·3=9 días.
545. Cada una de las cabras pasta en un sector que es un cuarto del área de un círculo de radio 50m, como son 4 cabras ellas pastan en el área de un círculo de 50m de radio; al quedar una sola cabra que pasta en esa misma área es necesario ponerla en el punto medio del terreno y que la cuerda sea de 50m para que pueda pastar lo mismo que pastaban las 4 juntas. Otra posibilidad es amarrar la cabra en uno de los vértices del terreno y darle a la cuerda una longitud de 100m.



$A_{RS} = 4 \cdot \frac{\pi \cdot 50^2}{4}$ $\quad$ $A_{RS} = \pi \cdot 50^2$ $\quad$ $A_{RS} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 100^2$

$A_{RS} = \pi \cdot 2500 m^2$ $\quad$ $A_{RS} = \pi \cdot 2500 m^2$ $\quad$ $A_{RS} = \pi \cdot 2500 m^2$

546. Debe quedar claro que el pelo que tarda más en caer es el que ha nacido recientemente, es decir el que menos tiempo tiene de nacido. Podemos determinar al cabo de que tiempo le tocará el turno de caerse. De los 300000 que existen aproximadamente el primer mes se caen 3000, en los dos primeros meses se habrán caído 6000, en los tres primeros meses 9000 y así sucesivamente, luego al cabo de un año se caen 36000, por lo tanto, el cabello de una persona dura aproximadamente 300000:36000=25:3= $8\frac{1}{3}$, es decir 8 años y 4 meses (un tercio del año son cuatro meses).
547. Consideremos que:
x→ días de la semana
x→ semanas
x→ meses del año
1→ el año
Como el año tiene 1331 días y sabemos que la cantidad de días por la cantidad de semanas por la cantidad de meses nos dará los días del año y tenemos que:
$x \cdot x \cdot x = 1331 \Rightarrow x^3 = 1331 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1331} \Rightarrow x = 11$ Cada semana tiene 11 días.
548. Partiendo de que Berta está sentada en el asiento 3 y como la afirmación de que Berta está al lado de Carlos es falsa entonces Carlos solo puede estar sentado en el asiento 1, y como es falsa la afirmación de que Ana está entre Berta y Carlos, entonces Ana tendrá que estar sentada en el asiento 4 y en el 2 estaría Diana.
(1) Carlos (2) Diana (3) Berta (4) Ana
549. Debemos analizar los casos extremos: por lo que sí extraemos las 10 bolas verdes no se satisface, si además se extraen 14 bolas negras, tampoco, de igual forma si se extraen 14 bolas rojas, si se sacan 14 bolas azules y 14 bolas blancas, es decir se han extraído 10+4·14=66 bolas y no se garantiza aún que existan 15 del mismo color, ahora cuando se extraiga la bola 67 esta tiene que ser de uno de los colores negro, rojo, azul o blanco y entonces tendremos al menos 15 bolas de un mismo color. Se necesitan sacar 67 bolas.
550. Está claro que si los lados de un rectángulo se reducen a la mitad, su área se reduce en un cuarto, pues: sean a y b los lados del rectángulo, al disminuir sus lados a la mitad tenemos $\frac{1}{2}a$ y $\frac{1}{2}b$ y el área del rectángulo inicial es $a \cdot b$ y el área del otro $\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}b = \frac{1}{4}a \cdot b$, como el área del rectángulo ABCD es $56 cm^2$ entonces el rectángulo EFGC tiene $\frac{1}{4} \cdot 56 = 14 cm^2$ de superficie.

551. Basta doblar el papel por las líneas punteadas y la caja queda con la parte abierta para arriba y la base aparece con la letra *c*. Luego la base de la caja es *c*.

552. Como los dobles (1-1, 2-2,···, 9-9) se pueden colocar entre dos fichas casadas, tenemos que cada número de tantos se repite 6 veces (por ejemplo: 2-0, 2-1, 2-3, 2-4, 2-5, 2-6), es decir, cada número de tantos se puede repetir un número par de veces, por lo tanto las fichas que forman cada grupo pueden casarse una con otras con igual número de tantos hasta que se agote el grupo, o sea cuando las 21 fichas estén casadas formando una hilera continua, colocamos los 7 dobles en los lugares correspondientes y entonces las 28 fichas están en una sola línea y casadas según las reglas del juego.

553. Si el 70% de los habitantes hablan inglés y todos hablan al menos un idioma entonces lo que falta, es decir, el 30% habla el francés y el otro por ciento que falta de los que hablan francés, que es el 30% también habla inglés, por lo tanto el 30% de la población habla los dos idiomas.

554. El mayor entero positivo de cuatro cifras diferentes es el número 9876 y el menor es el 1023 y su diferencia es:
9875-1023=8853.

555. El mayor número con cifras diferentes, excluyendo el cero como posible cifra es el número 987654321, como se debe buscar el mayor número con cifras diferentes que sea divisible por 18, se debe buscar de forma que sea divisible por 9 y 2; el número 987654321 es divisible por 9, pero no es divisible por 2; pero basta con permutar el 2 con el uno y obtenemos el número 987654312 que es divisible por 18 y además el mayor número con cifras diferentes.

556. Un razonamiento importante que se debe hacer es que si está parado en el peldaño medio, la cantidad de peldaños de la escalera es un número impar, al subir 4 está cuatro por encima de la mitad, al bajar 8 está 4 por debajo del medio, al subir 2 está a 2 del medio y al subir 11 está 9 peldaños por encima del medio y es el último; por lo tanto la escalera tiene 9·2+1=19 peldaños
Otra vía:
Hagamos
$x \to$ cantidad de peldaños

$$\frac{x+1}{2}+4-8+2+11=x$$
$$\frac{x+1}{2}+9=x$$
$$x-\frac{x+1}{2}=9$$
$$x-1=18$$
$$x=19$$

R/ La escalera tiene 19 peldaños.

557. Consideremos que:
$x \to$ cantidad de mesas
$x+1 \to$ cantidad de pescados
$x+1=2(x-1) \Rightarrow x+1=2x-2 \Rightarrow 2x-x=1+2 \Rightarrow x=3$
En el comedor había 3 mesas y se sirvieron cuatro raciones de pescado.

558. Procedemos utilizando la Aritmética
$1 \to$ pastel entero
La primera vez se quita $\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}$ queda $1-\frac{1}{3}=\frac{3-1}{3}=\frac{2}{3}$
la segunda vez $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$ queda $\frac{2}{3}-\frac{2}{9}=\frac{6-2}{9}=\frac{4}{9}$
la tercera vez $\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{27}$ queda $\frac{4}{9}-\frac{4}{27}=\frac{12-4}{27}=\frac{8}{27}$
Después de cortar tres veces quedó el $\frac{8}{27}$ del pastel original.

559. Analicemos los siguientes casos:
Caso I: Supongamos que B tiene los ojos negros y dice verdad, entonces A dijo que tenía los ojos azules, pero si A tiene los ojos azules, ella debía decir que los tenía negros, por lo tanto esto no es posible, de igual forma que si A tuviera los ojos negros, ella tenía que haber dicho la verdad, que eran negros, por lo que B no dice verdad, analizaremos otro caso.
Caso II: Supongamos que B tiene los ojos azules y miente al decir que A tiene los ojos azules, por lo tanto A dijo que tenía los ojos negros, lo cual se cumple para cualquiera de las

posibilidades, pues si tiene los ojos negros debe decir que los tiene negros y si los tiene azules debe decir que los tiene negros, hasta aquí no hay contradicción. Al preguntarle a C este responde que B tiene los ojos azules y A los tiene negros y como sabemos que B los tiene azules ella está diciendo la verdad y entonces sucede que A y C tienen los ojos negros y siempre dicen la verdad y B, D y E tienen los ojos azules y siempre mienten.

También es posible reconocer el color de los ojos de las princesas con una sola interrogante que sería preguntarle a cualquiera de ellas "*de qué color tiene los ojos cada una de ustedes*" y sucederá que si la que contesta tiene los ojos negros responderá la verdad, es decir dos con ojos negros y tres con ojos azules, que será el color de cada una de ellas. Si la que responde tiene los ojos azules va a responder que tres tienen los ojos negros y dos azules y basta con cambiar los colores, tres azules y dos negros para saber el color de cada una de ellas.

560. Se dividen las monedas en tres grupos: dos de 27 monedas cada uno y uno de 26, tomamos los dos grupos de 27 y lo colocamos en la balanza, si la balanza está en equilibrio entonces está en el de 26; dividimos el de 26 en dos grupos de 9 y uno de 8, colocamos los de 9 y si están en equilibrio está en el de 8; dividimos el de 8 en dos grupos de tres y uno de 2, colocamos los de 3 y si están en equilibrio está en el de 2; al balancear estas dos la que sube es la moneda falsa.

En caso de que al balancear los grupos de 27 uno suba ahí está la moneda falsa y hacemos tres grupos de 9, si al balancear dos grupos de 9 uno sube ahí está la moneda falsa; dividimos en tres grupos de 3, si al balancear dos de ellos uno sube ahí está la moneda falsa, lo dividimos en tres grupos de 1, si al balancear dos de ellos uno sube ahí está la moneda falsa, si no es la que queda fuera.

561. Ya en el ejercicio anterior se hizo un análisis para una cantidad determinada por lo que para generalizarlo hacemos lo siguiente: se toma la cantidad de monedas y se divide en tres grupos y establecemos la siguiente relación:

$n \rightarrow$ número de monedas.

$x \rightarrow$ número de pesadas.

$3^{x-1} < n \leq 3^x$

Se divide la cantidad de monedas en grupos de $\left[\dfrac{n+1}{3}\right]$(parte entera de $\dfrac{n+1}{3}$) y se deben efectuar x pesadas para determinar la falsa.

562. Debemos buscar una forma fácil de poder compararlos sin necesidad de efectuar las potencias, como no resulta fácil encontrar una base común tratemos de llevarlos a un exponente común, por lo que podemos expresarlos en la forma siguiente:

$x = 3^{40} = (3^4)^{10} = 81^{10}$

$y = 5^{30} = (5^3)^{10} = 125^{10}$

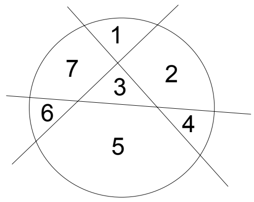
$z = 7^{20} = (7^2)^{10} = 49^{10}$

y como el exponente es el mismo es menor el que menor base tenga, si los ordenamos de menor a mayor nos quedarían así:

$49^{10} < 81^{10} < 125^{10}$, Es decir $z < x < y$.

563. Para resolver este problema debemos aplicar el principio de las casillas. Si coloco una moneda en la primer bolsa, dos en la segunda,**...**, y así sucesivamente, se necesitarán 55 monedas para tener un número diferente de monedas en cada bolsa (1+2+···+10=$\dfrac{10 \cdot 11}{2}$=55); Si se deja una vacía, en la otra una,**...**, y así sucesivamente necesitaría $\dfrac{9 \cdot 10}{2} = 45$ monedas y él solo posee 44 monedas, por lo que podemos concluir que con la cantidad de monedas y bolsas que Roberto posee no puede realizar lo que desea.

564. Como a Bernardo le faltan tantos años como los que ha estudiado Alfredo y a Alfredo le falta el doble de lo que él mismo ha estudiado entonces debemos dividir los doce años de estudio (desde primaria hasta duodécimo grado) en tres partes iguales, es decir, que a Bernardo le faltan 4 años para terminar el preuniversitario (comienza el noveno grado), mientras que Alfredo ha estudiado 4 años, le faltan 8 para concluir, el doble de los que ha estudiado, por lo que comienza el quinto grado.



565. Todo el que responde que son 6 comete un error lógico, pues en realidad son siete las partes en que se puede dividir el círculo como muestra la figura.

566. Es fácil demostrar que en la fila del dominó debe ser idéntico el número de tantos del final y del comienzo porque en las fichas del dominó cada número de tantos se repite un número par de veces, por consiguiente el número de tantos debe ser el mismo, es decir 5. De esta propiedad se deduce que la línea de 28 fichas del dominó puede cerrarse siempre por los extremos formando un anillo.

567. Todo número natural, al dividirse por 3 deja como resto 0,1 ó 2, por lo que podemos diferenciar dos casos:

Caso I: Tres de los cinco números dados dejan resto diferente en la división por 3, es decir, dejan resto 0,1 y 2 respectivamente. En este caso la suma de los tres números es un múltiplo de 3.

Caso II: Si no ocurre lo anterior entonces al menos tres números dejan el mismo resto en la división por 3 y en estas circunstancias también se cumple que la suma de dichos números es un múltiplo de 3.

En cualquiera de los dos casos posibles existen tres números que su suma es divisible por 3.

568. Efectuando los productos 3·6=18, 33·66=2178, 333·666=221778, 3333·6666=22217778, y así sucesivamente podemos llegar a la siguiente ley de formación; utilizando la notación que aparece en el ejemplo 32 del capítulo I del libro sería:

$2_{k-1}1_17_{k-1}8_1$ (donde k es la cantidad de factores 3 ó 6)

por lo tanto el producto A·B formado por 666 cifras 3 y 6 será:

$A \cdot B = 2_{665}1_17_{665}8_1$

569. Consideremos que:

x→ cantidad de monedas de 1 centavo

y→ cantidad de monedas de 2 centavos

z→ cantidad de monedas de 5 centavos

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=20 \\ \underline{x+2y+5z=50} \end{array}\right\} \Rightarrow y+4z=30 \Rightarrow y=30-4z$$

Para *z* =1; *y* =26 es imposible pues son 20 monedas.
Para *z* =2; *y* =22 es imposible pues son 20 monedas.
Para *z* =3; *y* =18 es imposible pues son 20 monedas.
Para *z* =4; *y* =14 es una posible solución.

$$x+y+z=20 \Rightarrow x+14+4=20 \Rightarrow x=20\text{-}18 \Rightarrow x=2$$

Para *z* =5; *y* =10; *x* =5 es imposible porque la cantidad de monedas de 5 centavos tiene que ser mayor que las de 1 centavo y en este caso son iguales.

Luego podemos concluir que: Mónica tenía 2 monedas de 1 centavo, 14 de 2 centavos y 4 monedas de 5 centavos en su cartera.

570. Como Alberto tiene 3 panes y cada día se comía $\frac{1}{3}$ de pan, entonces él tenía $\frac{9}{3}$ y como caminaron 8 días, se comió $\frac{8}{3}$ y solo le dio a Carlos $\frac{1}{3}$ de pan; mientras que Bernardo al tener 5 panes, tenía $\frac{15}{3}$ de los que se comió $\frac{8}{3}$ y le dio a Carlos $\frac{7}{3}$, por lo que Carlos decidió entregar una moneda por cada tercio de pan recibido, luego le entregó una moneda a Alberto y 7 monedas a Bernardo por lo tanto fue justo en el reparto realizado.

571. Generalmente, en los estudiantes que solo dominan las cuatro operaciones fundamentales de cálculo, hay una tendencia a la ejecución, pues ellos comienzan a probar sin analizar los datos ofrecidos y proceden de la siguiente forma: suman 125+5=130 y plantean que es imposible que el pastor tenga 130 años, de igual forma si restan 125-5=120 y no es posible que el pastor tenga tanta edad, como sucede si se multiplica 125·5=625 que es más absurdo y entonces al dividir 125:5=25 inmediatamente responden que el pastor tiene 25 años; y aunque aparentemente el razonamiento es correcto, realmente se debe responder que con los datos que

aparecen en el problema no se puede determinar la edad del pastor, pues nada tiene que ver el número de ovejas y de perros con la edad el pastor al no ofrecerse ninguna relación, luego los datos son insuficiente para resolver este problema.

572. Para resolver este tipo de problema es conveniente apoyarse en una tabla como la ilustramos a continuación:

	Ana	Belquis	Carmen	Diana	Elena
Inglés	*o*	*x*	*x*	*o*	*o*
Español	*x*	*x*	*x*	*x*	*o*
Francés	*x*	*x*	*o*	*o*	*x*
Italiano	*o*	*x*	*x*	*o*	*x*
Portugués	*x*	*x*	*x*	*o*	*o*

$x \rightarrow$ son los que hablan ese idioma

$o \rightarrow$ los que no hablan ese idioma

Se puede observar que en la tabla aparecen todos los elementos que se cumplen y no hay contradicción:

Belquis y Carmen dominan el Inglés.

Belquis, Carmen y Diana conocen el Español.

El idioma común de Ana, Belquis y Elena es el Francés.

El único idioma común a Carmen y Elena es el Italiano.

Ana, Belquis y Carmen son las que conocen el Portugués.

El idioma más hablado es el Español pues lo hablan 4 personas.

Diana solo habla el Español.

Elena solo habla el Francés y el Italiano.

Ana domina el Español, el Francés y el Portugués.

Carmen todos excepto el Francés.

Y la que habla los 5 idiomas es Belquis.

573. Este es otro problema que no se puede resolver pues nos faltan datos para determinar su solución, en este caso es necesario conocer el precio de las libretas o lo que gastó María para comprar las 12 libretas, este tipo de problemas prepara al estudiante para reconocer que no siempre todos los problemas tienen solución.

574. Está claro que se pueden distribuir 12 niños en cada una de las aulas de la escuela y no tener en ninguna de las aulas 2 niños del mismo edificio, pero cuando vamos a incorporar al niño número 13 tiene necesariamente que estar ubicado en una de las 12 aulas anteriores y por tanto al menos una de las aulas tendrá al menos 2 niños que viven en el mismo edificio.

575. Si $\overline{xy} \rightarrow$ es el número

$x \rightarrow$ decenas

$y \rightarrow$ unidades

$$x + y = 7$$
$$\overline{xy} + 27 = \overline{yx}$$

$$x + y = 7$$
$$10x + y + 27 = 10y + x$$

$$x + y = 7$$
$$-9x + 9y = 27$$

$$x + y = 7$$
$$-x + y = 3$$
$$2y = 10$$
$$y = 5$$

$$x + y = 7$$
$$x = 7 - 5$$
$$x = 2$$

R/ El número que pensé es 25.

576. Hay que tener en cuenta que del 1 al 9 existen nueve dígitos y del 10 al 99 son 90·2=180 dígitos y para los de tres cifras del 100 al 999 son 900·3=2700 dígitos, con lo que se pasa del número buscado. Por lo que tendremos que:

x es la cantidad de números de tres dígitos.

$$1\cdot 9 + 2\cdot 90 + 3\cdot x = 2001 \Rightarrow 189 + 3x = 2001$$

$$63 + x = 667 \Rightarrow x = 604$$

Esto nos indica que se necesitan 604 números de tres cifras y como estos comienzan por el 100 entonces se necesitan 603 más, por lo que el último número sería el 703 y la última cifra de esta es 3, luego, el 3 es el dígito que ocupa el lugar 2001 en dicho número natural.

577. Nos apoyaremos en la siguiente tabla

Uno de los procedimientos para resolver este tipo de ejercicio es comenzando de atrás hacia delante.

Al final quedó un águila (condición del problema), pero en la noche el águila se come una serpiente, por lo tanto, antes del águila comer queda una serpiente; en la tarde, antes de la serpiente comer, queda una hiena; y en la mañana, antes de la hiena comer, quedan dos águilas: la que se come la hiena y la que queda al final. El segundo día, en la noche, antes de que las águilas coman, quedan tres serpientes; por la tarde, antes que las serpientes coman quedan cuatro hienas; y por la mañana, antes de que las hienas coman, quedan seis serpientes. El primer día, en la noche, antes de que las águilas coman, quedan nueve serpientes; en la tarde, antes de que las serpientes coman, quedan trece hienas; y por la mañana, antes de que las hienas coman, quedan 19 águilas. Luego, al principio del primer día, había 19 águilas, 13 hienas y 9 serpientes.

días →	primero			segundo			tercero		
Sesiones / Animales	M	T	N	M	T	N	M	T	N
Águila	19	6	6	6	2	2	2	1	1
Hiena	13	13	4	4	4	1	1	1	-
Serpiente	9	9	9	3	3	3	1	1	1

578. Utilizando la notación del ejemplo 32 del capítulo I tenemos que:

a)

$$10^{2003} = 1\underbrace{000\cdots000}_{2003\,veces}$$

$$\begin{array}{r} \overbrace{1000\cdots000000}^{2003\,veces} \\ -\ldots\ldots\ldots..2003 \\ \hline \underbrace{999\cdots99}_{1999\,veces}7997 \end{array}$$

$$\begin{aligned} S\left(10^{2003}-2003\right) &= \\ S\left(\underbrace{999\cdots99}_{1999\,veces}7997\right) &= \\ S\left(9_{1999}7_1 9_2 7_1\right) &= \\ 9\cdot 1999+7\cdot 1+9\cdot 2+7\cdot 1 &= \\ 9\cdot 2001+7\cdot 2 &= \\ 18009+14 &= \\ 18023 & \end{aligned}$$

b)

$$2\cdot 10^{2003} = 2\underbrace{000\cdots000}_{2003\,veces}$$

$$\begin{array}{r} 2000\cdots000000 \\ -\ldots\ldots\ldots\ldots2003 \\ \hline 1\underbrace{99\cdots99}_{1999\,veces}7997 \end{array}$$

$$S\left(2^{2^{1002}}\cdot 5^{2003}-2003\right) =$$

$$\begin{aligned} S\left(2^{2004}\cdot 5^{2003}-2003\right) &= \\ S\left(2\cdot 10^{2003}-2003\right) &= \\ S\left(1\underbrace{99\cdots99}_{1999\,veces}7997\right) &= \\ S\left(1_1 9_{1999}7_1 9_2 7_1\right) &= \\ 1+9\cdot 1999+7+9\cdot 2+7 &= \\ 1+9\cdot 2001+7\cdot 2 &= \\ 1+18009+14 &= \\ 18024 & \end{aligned}$$

579. Está claro que el divisor de k no puede ser cero, pues la división por cero no está definida, además no puede ser 6, porque si es divisible por 6 lo es también por 2 y por 3 y entonces no sería el menor divisor distinto de uno, pues 3 y 2 son menores que él, luego el divisor de k es 7. Ahora el valor de k para que sea un cuadrado perfecto es: descomponiendo en factores primos a $140=2^2\cdot 5\cdot 7$, y le falta $5\cdot 7=35$ que es el valor de k. Por lo que podemos concluir que $k=35$ es el menor número natural tal que $140\cdot k$ sea un cuadrado perfecto.

580. Debemos partir de
f(10) = f(2·5) = f(5) + f(2) por (1)
pero como f(10)=0 por (3)
entonces f(5) + f(2) =0
luego f(2) = - f(5) pero como f(2) y f(5) son no negativos
entonces necesariamente f(2) = f(5) = 0
ahora como 1985 = 397.5
Por otra parte f(397·9) = f(3573) = 0 por (2)
pero 0 = f(397·3·3) = f(397·3) + f(3)
= f(397) + f(3) +f(3) = 0 y como f(3) =0 por (2)
por tanto f(397) = 0
y como f(1985) = f(397) + f(5)
Entonces tenemos que: f(1985) = 0

581. Lo que debe hacer realmente es dividir por $\frac{9}{13}$, pues si se multiplica por $\frac{9}{13}$ lo que haría sería disminuir el salario del trabajador al estar multiplicando por un número menor que 1, sin embargo si dividimos el salario por $\frac{9}{13}$ este aumenta ya que al dividir por una fracción esto se convierte en un producto por el recíproco del segundo término, entonces al dividir por $\frac{9}{13}$ se multiplica por $\frac{13}{9}$ que es una fracción mayor que 1 y el salario del trabajador aumentaría y entonces si lo está estimulando. Por tanto tiene que dividirle el salario por $\frac{9}{13}$.

582. Primero hay que reconocer que una docena tiene 12 elementos, en este caso 12 naranjas, luego 4 docenas son 48 naranjas y como cada kg tiene entre 6 y 8 naranjas, para tener la mayor cantidad de kg posibles tenemos que considerar que con 6 naranjas se tiene 1kg y entonces 48:6=8kg es el máximo que se puede tener con 4 docenas de naranjas.

583. Como son 5 números enteros consecutivos y el del medio es 70 entonces la suma es 70·5=350, pues el anterior al del medio (69) le falta uno para 70, pero al siguiente (71) le sobra uno, lo mismo para los extremos al menor (68) le faltan dos pero al último (72) le sobran dos; luego ellos suman 350.

584. Nos piden calcular $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ efectuando tenemos:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}$$ completando un cuadrado perfecto

$$=\frac{x^2+2xy+y^2-2xy}{xy}$$

y como $x+y=6$ y $x\cdot y=3$ tenemos

$$=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}$$
$$=\frac{(x+y)^2}{xy}-\frac{2xy}{xy}$$
$$=\frac{(x+y)^2}{xy}-2$$

$$=\frac{6^2}{3}-2$$
$$=\frac{36}{3}-2$$
$$=12-2$$
$$=10$$

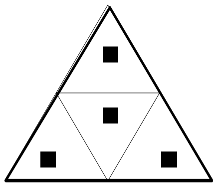
585. Denotemos por *y* la casilla que está debajo de la que tiene el número 14 y a la izquierda de la que tiene el número 13, de acuerdo a las condiciones de que la suma de las diagonales, las filas y las columnas es la misma, tenemos que:

$$1+14+y=13+y+x$$
$$x=15+y-13-y$$
$$x=2$$

	1	26
	14	
x	*y*	13

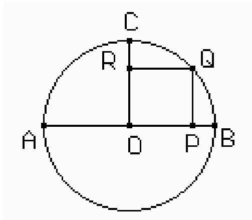
El número que debe aparecer en la casilla marcada con una *x* es el número 2, dejamos al lector la posibilidad de probar que esta es la solución en el cuadrado mágico.

586. Aunque en ocasiones se trata de obtener la solución a través del ensayo sucesivo de diferentes formas de división de la figura, si se tiene en cuenta, que se trata de un triángulo equilátero y de la disposición de los 4 cuadraditos interiores se puede llegar a que la solución solo es posible obteniendo 4 triángulos equiláteros que se obtienen al unir los puntos medios de cada lados y dentro de cada triángulo equilátero aparece exactamente un cuadradito como se muestra en la figura.

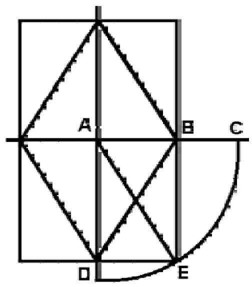


587. Debemos tener en cuenta que para picar una viga en dos el carpintero debe hacer un solo corte, es decir que por cada corte el cobra 50 centavos, ahora, para picar una viga en cuatro debe realizar tres cortes, luego tiene que cobrar $1,50 para picar la viga en cuatro.

588. Es evidente que para resolver el problema solo debemos recordar que en un rectángulo las diagonales son iguales, por lo que en el rectángulo OPQR se cumple que $\overline{RP}=\overline{OQ}$; Además como Q es un punto de la circunferencia entonces $\overline{OQ}$ es un radio y su longitud es 6cm y por tanto $\overline{RP}=6cm$.



589. Basta con darse cuenta de que AC, AD y AE son radios de la circunferencia y AE y BD son diagonales de un rectángulo, por lo tanto son iguales en longitud, y el lado del rombo es igual a 9m.

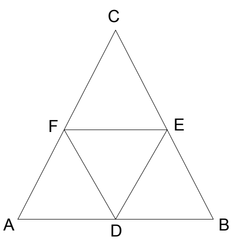


590. Para obtener la cantidad de autos pintados que hay en el taller debemos analizar las proposiciones dadas, para establecer comparaciones e inferir el resultado. Al comparar las proposiciones segunda y última, se puede inferir que a lo sumo pueden existir 6 autos con el techo negro, haciendo una diferenciación de casos: Suponiendo que 6 autos tienen el techo negro, entonces por la primera proposición solo uno tendrá el cuerpo pintado de negro, pero por la tercer proposición serían 11 autos 6 de techos negros y 5 de techos rojos pero como uno es de cuerpo negro, 10 tendrían cuerpo rojo lo que se contradice con la proposición 4.

Consideremos que 5 techos son negros entonces dos cuerpos también serían negros y los autos serían 10. De estos 10 autos 8 tendrían el cuerpo rojo contrario a la cuarta proposición.

Sean 4 los techo pintados de negro, la primer proposición conduce a que tres cuerpos son negros y los autos serían 9. Este caso satisface, no contradice ninguna proposición y nos conlleva a la siguiente respuesta: 4 autos tienen techo negro y cuerpo rojo, 3 autos tienen cuerpo negro y techo rojo, 2 autos están pintados de rojo completo y en resumen había 9 autos en el taller.

591. Para analizar el ejercicio es necesario hacer una figura de análisis.



A partir de los datos que se nos ofrecen se puede sacar una buena información: como el ΔABC es isósceles $\angle A=\angle B$, y como el ΔDEF es equilátero $\angle EDF=\angle DEF=\angle DFE=60^0$ (1), además el hecho de tener que probar: $\angle ADF=\dfrac{\angle BED+\angle EFC}{2}$. Esto es lo mismo que

$2\angle ADF=\angle BED+\angle EFC$ y el hecho de tener dos veces el $\angle ADF$, nos da la idea de que se deben establecer relaciones donde aparezca este ángulo dos veces.

Por la relación del ángulo exterior e interiores no adyacentes a él podemos establecer las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} \angle ADF + \angle A = \angle DFE + \angle EFC \\ \angle ADF + \angle FDE = \angle B + \angle BED \end{cases}$$

Pero como conocemos que $\angle A = \angle B$ por ser ángulos bases de un triángulo isósceles y se cumple (1) tenemos:

$$\begin{cases} \angle ADF + \angle A = 60^0 + \angle EFC \\ \angle ADF + 60^0 = \angle A + \angle BED \end{cases}$$

sumando miembro a miembro tenemos:

$$2\angle ADF + 60^0 + \angle A = \angle EFC + \angle BED + \angle A + 60^0$$

$$2\angle ADF = \angle EFC + \angle BED \Rightarrow \angle ADF = \frac{\angle EFC + \angle BED}{2}$$

592. Resolver el sistema por la vía algebraica resulta demasiado engorroso, pero si nos detenemos a analizar el lugar geométrico que representan cada una de las ecuaciones y la relación de posición de ellas nos permite encontrar con mayor facilidad la solución del sistema.

Queda claro que la ecuación $x^2\text{-}y^2 = 0$ nos representa un par de rectas, la recta de la ecuación $y = x$ y la recta de la ecuación $y = \text{-}x$ y la ecuación $(x\text{-}a)^2 + y^2 = 1$ representa la circunferencia de centro en (*a;0*) y radio 1.

Hagamos una figura de análisis y analicemos los casos posibles que se pueden obtener en la relación de posición de las rectas y la circunferencia.

No tenga solución:

La circunferencia y las rectas no tienen punto común; esto es posible cuando $a > \left|\sqrt{2}\right|$, (cuando a> $\sqrt{2}$ ó a<-$\sqrt{2}$).

Una solución:

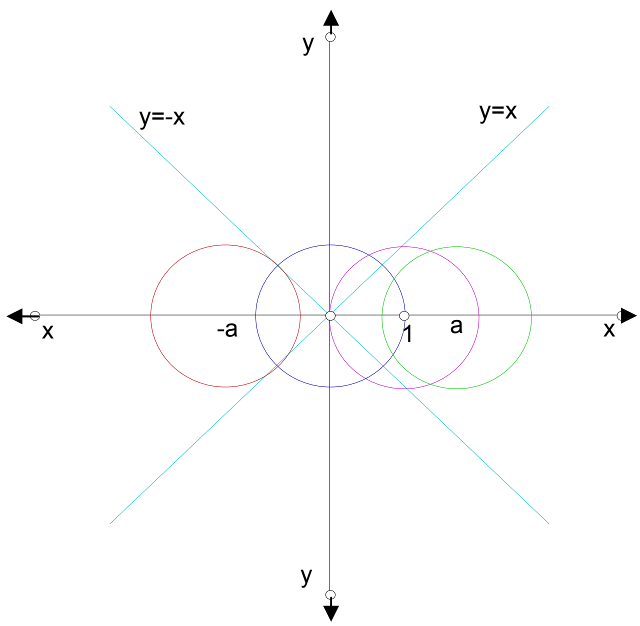
La circunferencia corta en un punto a las dos rectas; esto no es posible pues las rectas son simétricas respecto a los ejes y al centro y al cortar una tiene que hacerlo con la otra, luego no es posible que tenga una sola solución.

Dos soluciones:

La circunferencia corta en dos puntos a las rectas, esto es posible cuando la circunferencia es tangente a las rectas, en este caso cuando a = $\sqrt{2}$ ó a =-$\sqrt{2}$.

Tres soluciones:

La circunferencia corta en tres puntos a las rectas, esto es posible cuando la circunferencia corta a la recta en el punto de intercepción de estas y un punto de cada una de ellas, en este caso cuando a =1 ó a =-1.



Cuatro soluciones:

La circunferencia corta en cuatro puntos a las rectas, esto es posible en el intervalo de $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$, excluyendo los casos en que a =1 y a =-1 (que solo tiene tres soluciones).

Cinco soluciones:

En ningún caso es posible que la circunferencia corte a las rectas en cinco puntos, por lo tanto el sistema no puede tener cinco soluciones.

593. Nos debemos apoyar en una tabla como la que ilustramos y hacer un análisis de cada una de las proposiciones que nos dan e inferir lo que nos piden para llegar al resultado pedido.

número	1ra	2da	3ra	4ta	5ta
oficio	constructor	campesino	estudiante	maestro	chofer
color	Amarilla	azul	roja	blanca	verde
edad	20	19	18	21	32
bebida	chocolate	jugo de naranja	leche	jugo de melón	café
deporte	pelota	baloncesto	natación	judo	kárate

Una vez hecha esta reflexión se puede dar la respuesta pedida; el que toma chocolate es el constructor y el que tiene 32 años es el chofer.

594. Como nos hablan de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de radio 5 y sus diagonales son números naturales que suman 19, necesariamente sus diagonales tienen que ser 10 y 9, que es la única posibilidad de que el cuadrilátero esté inscrito en una circunferencia de radio 5, o sea de diámetro 10, pues las demás combinaciones que dan 19 no pueden estar en una circunferencia de radio 5, ejemplo (11 y 8); además es conocido que en todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia se cumple que la suma del cuadrado de sus lados es igual a la suma del cuadrado de sus diagonales por lo que solo es necesario calcular $10^2+9^2=100+81=181$ y concluimos que la suma de los cuadrados de los cuatros lados del cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia de radio 5, es 181.

595. Con cinco números uno será $111 - 11 = 100$; con cinco números cinco es $5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5 = 100$ ó $(5+5+5+5) \cdot 5 = 100$.

596. Un sencillo cálculo confirma esta situación sorprendente. Siendo R el radio de la esfera (la Tierra o la naranja), el cordel ajustado mide 2 πR. Cuando le agregamos un metro, el cordel pasa a medir 2πR+1. El radio que tiene esta nueva circunferencia, será (2πR+1)/2π . La diferencia de radios nos da la holgura que es: 1/2π ≈ 0,1592356... cm en los dos casos. O sea la holgura que se consigue para la naranja es exactamente la misma que para la Tierra porque no depende del radio de la esfera que se tome.

597. Debemos tener en cuenta que el espacio recorrido es le mismo, y como se aumenta la velocidad en $\frac{1}{4}$, entonces el tiempo se disminuye también en $\frac{1}{4}$ por ser la velocidad y el tiempo inversamente proporcionales, pues a medida que aumenta la velocidad disminuye el tiempo cuando se mantiene el espacio a recorrer. De ahí que si disminuye el tiempo en $\frac{1}{4}$ entonces demora 2,5 horas menos, luego realizará el viaje en 10-2,5=7,5 horas aumentando la velocidad en $\frac{1}{4}$.

598. Como el cuadrado es equivalente al triángulo, eso significa que tiene la misma área, luego se cumple que:

$$a^2 = \frac{b \cdot h}{2} \qquad a = \sqrt{12 \cdot 16} \qquad \textit{pero}$$

$$a = \sqrt{3 \cdot 4 \cdot 16} \qquad b = 24dm$$

$$a^2 = \frac{24 \cdot 16}{2} \qquad a = 2 \cdot 4\sqrt{3} \qquad h = \frac{2}{3} \cdot b$$

$$a = 8\sqrt{3}dm \qquad h = 16dm$$

El lado del cuadrado es de $8\sqrt{3}dm$

599. Daremos algunas posibles combinaciones, es posible que el lector encuentre otras, sobre todo si conoce el álgebra y aplica potencias, raíces, logaritmos, etc.

$$0=(4-4)\cdot 44=(4-4)\cdot 4\cdot 4=44-44=4\cdot 4-4\cdot 4$$

$$1=\frac{44}{44}=\frac{4+4}{4+4}=\frac{4\cdot 4}{4\cdot 4}=44^{4-4}=\left(4^{4}\right)^{4-4}$$

$$2=\frac{4}{4}+\frac{4}{4}=\frac{4\cdot 4}{4+4}$$

$$3=\frac{4+4+4}{4}=\frac{4\cdot 4-4}{4}$$

$$4=4+4\cdot(4-4)=4\cdot 4^{4-4}$$

$$5=\frac{4\cdot 4+4}{4}$$

$$6=\frac{4+4}{4}+4$$

$$7=4+4-\frac{4}{4}=\frac{44}{4}-4$$

$$8=4+4+4-4=4\cdot 4-4-4=4\cdot 4-(4+4)$$

$$9=4+4+\frac{4}{4} \qquad 10=\frac{44-4}{4}$$

600. Aquí se presentan algunas formas y se deja abierto al lector para que encuentre otras. Algunos de los signos utilizados son: $\sqrt{n},\ \sqrt[n]{a},\ [n],\ \frac{a}{b},\ n!,\ \log_a b,\ \ln a,$ que representan por ese orden la raíz cuadrada de *n*, la raíz *n*-ésima de *a*, la parte entera de *n*, el cociente entre *a* y *b*, el factorial de *n*, el logaritmo en base *a* de *b* y el logaritmo natural de *a*.

- $0=\frac{5-5}{5}=(5-5)^{5}=\sqrt[5]{5-5}=5(5-5)$
- $1=5^{5-5}=\sqrt[5]{\frac{5}{5}}=\left(\frac{5-5}{5}\right)!$
- $2=\frac{5+5}{5}$
- $3=\frac{5}{5}+\left[\sqrt{5}\right]=(5-5)!+\left[\sqrt{5}\right]$
- $4=5-\frac{5}{5}$
- $5=5+5-5=5\cdot\frac{5}{5}$
- $6=5+\frac{5}{5}=5+\log_5 5$
- $7=5+\left[\frac{5}{\sqrt{5}}\right]$
- $8=5+\left[\sqrt{5+5}\right]=\left[\sqrt{5}\right]^{\left[\sqrt{5+5}\right]}$
- $9=\left[\sqrt{5+5}\right]^{\left[\sqrt{5}\right]}=5+5-[\ln 5]$

601. Este problema es algo más complicado que los anteriores. He aquí algunas de las posibles soluciones:

$$31=33-\frac{3+3}{3}=33-3+\frac{3}{3}=3^{3}+3+\frac{3}{3}$$

602. Para resolver el problema es suficiente con llenar la vasija de 4 litros y verterla en la de 9, se repite este proceso por segunda vez, tenemos 8 litros en la de 9, llenamos la de 4 y vertemos un litro en la de 9, luego quedan 3 litros en la de 4, vaciamos la de 9 litros y echamos los 3 litros en ella, llenamos la de 4 litros, la echamos en la de 9 litros y tenemos exactamente 7 litros en la vasija de 9, que era lo que se quería.

603. Se debe determinar el m.c.m(3;4;8), dentro de 24 días viaja a los tres municipios el mismo día.

604. Debemos encontrar tres números naturales distintos que su producto sea igual a su suma y eso solo es posible con los números 3, 2 y 1, ya que se cumple que $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3 + 2 + 1 = 6$, luego una mata fue sembrada hace tres años, otra hace dos años y la otra hace un año.

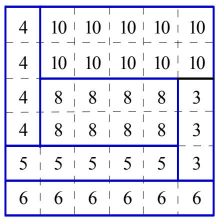
605. Si se mantiene el uno encima del 5 (está en el medio) solo se pueden obtener dos formas, permutando las columnas de los extremos, pues la solución es única salvo el orden en que tomemos los números, la solución es:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Como muestran las figuras anteriores los números pares están en los extremos, por lo que no existe ninguna posibilidad de que el 2 se encuentre encima del número 5.

606. Como en un tablero de 6x6 casillas los posibles rectángulos que se pueden formar son de 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 18, 20, 24 y 30 casillas; ahora como debemos encontrar la cantidad máxima de rectángulos que se pueden determinar en una descomposición de este tipo donde ningún rectángulo puede ser cuadrado y no pueden existir dos iguales, debemos probar con los más pequeños que se pueden formar, pero tenemos que: $2+3+4+5+6+8+10=38$, por lo que con esta cantidad (7 rectángulos) se pasa de las casillas existentes (36) hay que quitar un rectángulo y entonces M = 6 es la máxima cantidad de rectángulos que se pueden hacer con las condiciones que se plantean. Una combinación con la máxima cantidad de rectángulos es la que se presenta en la figura.



607. Muchos piensan que los ojos azules tienen que ver con la solución del problema, sin embargo no importa el color que tengan los ojos de sus hijos, lo importante es que el mayor de sus hijos, es decir que el mayor es uno solo, ahora, por qué es importante saber que el mayor es uno solo, pues verán, como dice Pedro que el producto de las edades de sus hijos es 36, descompongamos a 36 en 3 factores, las posibilidades son:

$$36 \cdot 1 \cdot 1 \Rightarrow 36 + 1 + 1 = 38$$
$$18 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow 18 + 2 + 1 = 21$$
$$9 \cdot 4 \cdot 1 \Rightarrow 9 + 4 + 1 = 14$$
$$9 \cdot 2 \cdot 2 \Rightarrow 9 + 2 + 2 = 13$$
$$6 \cdot 6 \cdot 1 \Rightarrow 6 + 6 + 1 = 13$$
$$6 \cdot 3 \cdot 2 \Rightarrow 6 + 3 + 2 = 11$$
$$4 \cdot 3 \cdot 3 \Rightarrow 4 + 3 + 3 = 10$$

Como se muestra la suma de ellas da un número que es diferente en todos los casos excepto en el que la suma es 13, recuerden que Juan está viendo la cantidad de ventanas que tiene el edificio y por tanto si esta hubiera sido un valor de 38, 21, 14, 11 ó 10, Juan inmediatamente le podía decir las edades, pero como el número de ventanas abiertas eran 13, de lo que él tiene dos resultados, necesitaría entonces un dato adicional, al Pedro decirle que el mayor tiene los ojos azules, el da la respuesta pues sabe que el mayor es uno solo y da las edades de los tres hijos, que son: el mayor 9 años, y los menores (mellizos) dos años cada uno

Debemos aclarar que si Pedro le hubiera dicho "**...** los mayores son**...**", entonces la respuesta sería: los mayores 6 y el menor 1; lo importante del último dato es el hecho de que el mayor se refiere a uno solo.

608. Para que sean divisibles por 15 deben tener la forma 15k, donde k>0 y además debemos analizar cuál es el último valor que debe tomar k para que 15k<1999. Al calcular $1999 = 133 \cdot 15 + 4$ podemos deducir que existen 133 números naturales divisibles por 15 que son mayores que cero y menores que 1999. Para que sean divisibles por 15, 20 y 35 simultáneamente debemos buscar el m.c.m de estos tres números: m.c.m(15,20,35)=420. Luego son divisibles por 15, 20 y 35 simultáneamente los números que tienen la forma 420k y haciendo k=1,2,**...**,i tenemos los siguientes números: 420, 840, 1260, 1680; los demás son mayores que 1999.

609. Debemos partir de que las últimas cifras terminan en 2, 4, 8 y 6. Para determinar en cuál termina 2^{2001} debemos dividir $\frac{2001}{4}$ y ver cuál es el resto, como el resto es 1 entonces podemos asegurar que 2^{2001} termina en 2.

$$2^1 = \underline{2}$$
$$2^2 = \underline{4}$$
$$2^3 = \underline{8}$$
$$2^4 = 1\underline{6}$$
$$2^5 = 3\underline{2}$$

610. Para obtener la suma correcta Juan debe restar $35\,059{,}05$ que se obtiene de la diferencia $35\,095 - 35{,}95 = 35\,059{,}05$ al restar este valor se obtiene el valor correcto.

611. Cada hoja tiene 0,25 mm de espesor y se tiene un millón de hoja, pues se debe multiplicar $0{,}25 \cdot 1000000 = 250000mm = \quad = 25000cm = 2500dm = 250m$. El paquete tiene 250m de altura.

612. Primero debemos determinar el número de bolas que debe tener cada grupo para que tengan el mismo número y todas sean del mismo color en cada grupo, para ello debemos determinar el MCD(168,132,180)=12. Cada grupo debe tener 12 bolas. Se deben formar 168:2=14 grupos de bolas rojas, 132:12=11 grupos de bolas blancas y 180:12=15 grupos de bolas azules. El número mínimo de grupos que se deben formar es 14+11+15=40 grupos.

613. a) El juego consta de $3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$ figuras en total.
 b) Las figuras triangulares son $3 \cdot 3 = 9$ figuras.
 c) Son figuras pequeñas $3 \cdot 4 = 12$.
 d) Los que difieren en triangular roja son $2 \cdot 3 = 6$, los que difieren en triangular grande son $2 \cdot 3 = 6$ y los que difieren en rojo grande son $2 \cdot 2 = 4$, luego los que difieren en exactamente dos características a la figura "**triangular roja grande**" son $6 + 4 + 6 = 16$ figuras.

614. El producto de los números primos consecutivos 29, 31 y 37 es un número de cinco cifras pero la primera de la izquierda es 3, por lo tanto no son los números buscados, de igual forma 31, 37 y 41 pues la primera de la izquierda es 4, pero cuando analizamos los primeros consecutivos 37, 41 y 43 su producto es 65231; cumplen las condiciones planteadas. Se puede probar que 41, 43 y 47 no cumplen la condición pues la primera de la izquierda es 8. La única posibilidad de que la primera de la izquierda sea 6 es el producto de los números primos consecutivos $37 \cdot 41 \cdot 43 = 65231$ y de aquí concluimos que el número de la casa del profesor es 41 y el de su teléfono es 65231.

615. Por todos es conocido que la suma de los primeros *n* números naturales es: $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$ de igual forma la del cuadrado de los *n* primeros números naturales es: $1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ de igual forma la del cubo de los *n* primeros números naturales es: $1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ (I)

pero para los *n-1* primeros números naturales es:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 = \left[\frac{(n-1)n}{2}\right]^2 \qquad \text{(II)}$$

y restando (I) - (II) tenemos $n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{(n-1)n}{2}\right]^2$ por lo que queda demostrado que todo número al cubo se obtiene de la diferencia de dos cuadrados.

616. Denotemos por:
 $x \to$ Cantidad de tela que existía antes del lunes.
 El lunes teníamos $x + 80$
 El martes $x + 80 - 440 = \frac{x}{2}$
 R/ Antes del lunes en la tienda existían 720m de tela.

$$x - \frac{x}{2} = 360$$
$$\frac{2x - x}{2} = 360$$
$$x = 360 \cdot 2$$
$$x = 720$$

617. Con frecuencia, para resolver este problema, se procede a realizar diversos cálculos, utilizar fórmulas físicas y hacer reflexiones y razonamientos, sin comprender que los ciclistas demoran 3 horas en encontrarse y que por tanto

la mosca voló sin parar exactamente 3h y como su velocidad fue de 100km/h entonces ella cubrió una distancia de
$100km/h \cdot 3h = 300km$.

618. En muchas ocasiones, buscando la solución de este tipo de problema se razona de esta manera: la oruga durante un día (día y noche, durante 24h) sube 5m y baja 2m, o sea, sube 3m por día en total y como la altura es de 9m será alcanzado por la oruga al cabo de tres días. Alcanzará la altura de 9m el miércoles a las 6 de la mañana.
Evidentemente esa respuesta es incorrecta. A las 6:00am del lunes estará a 3m, y el martes a las 6:00am estará a una altura de 6m; ahora, ese mismo día, comenzando desde las 6:00am y hasta las 6:00pm, puede subir otros 5m más, por lo que ya habrá alcanzado los 9m que debía subir, nos queda por determinar a qué hora arriba a los 9m pues a las 6:00pm llegaría a los 11m y ella tiene que subir solo 9m. Considerando que la oruga avanza a una velocidad constante debemos encontrar el tiempo que demora en subir 1m y tenemos que:

$$\begin{aligned} &5m \cdots\cdots 12h \\ &1m \cdots\cdots x \\ &x = \frac{1m \cdot 12h}{5m} \\ &x = \frac{12}{5}h = 2\tfrac{2}{5}h \end{aligned}$$

Pero $\tfrac{2}{5}h$ es igual a

$$\begin{aligned} &1h \cdots\cdots 60\min \\ &\frac{2}{5}h \cdots\cdots y \\ &y = \frac{\frac{2}{5}h \cdot 60\min}{1h} \\ &y = 24\min \end{aligned}$$

Para subir un metro necesita 2h y 24min, pero como el martes debe subir 3m serían 7h y 12min, como comienza a subir a las 6:00 am llegará a los 9m el martes a la 1:12 pm.

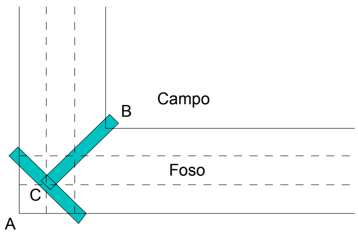
619. Este tipo de ejercicio es bastante discutido, después de realizar un análisis del mismo podemos concluir que en el tercer días de sembrados ambos árboles tendrán exactamente la misma altura, lo cual se ilustra en la tabla.
Es en el tercer día de sembrados que ambos árboles logran tener exactamente la misma altura, pues el primer árbol pasa de 4,5 a 6,75 y el segundo de 3 a 9 y siempre va a existir un instante en que ambos tengan la misma altura.

	Árbol A	Árbol B
1^{er} día	3cm	1cm
2^{do} día	4,5cm	3cm
3^{er} día	6,75cm	9cm
4^{to} día	10,13cm	27cm

620. En la figura hay 24 rombos, en cada hexágono existen $6 \cdot 3 = 18$ rombos, además 3 rombos de enlace entre los hexágonos y 3 rombos grandes (los lados son el doble de los demás) todo esto nos da 24 rombos en la figura.

621. Para calcular el área de la región sombreada basta calcular dos veces el área de un rectángulo (los tres son iguales) y la mitad del área de uno de ellos por lo que tenemos:
$2(5 \cdot 4) + \frac{1}{2}(5 \cdot 4) = 40 + 10 = 50cm^2$ El área de la región sombreada es de $50cm^2$.

622. Basta analizar el dibujo para comprender como se resuelve el problema. Para fundamentar un poco desde las matemáticas: si dividimos el ancho del foso en tres partes entonces la distancia de A hasta B será igual a $3\sqrt{2}$ y la distancia de A hasta C será de $2\sqrt{2}$, pero las tablas serán iguales a 3 y es evidente que se cumple que $3 + 2\sqrt{2} > 3\sqrt{2}$, por lo que es posible, colocando las tablas en esa posición, cruzar el foso sin dificultad.



623. Se debe hacer una diferenciación de casos:
Caso I: Supongamos que el capitán A acertó que A ocupa el 1^{er} lugar, entonces el 2^{do} lo ocupa C y el 3^{ro} B pues se equivocó en los otros dos, de aquí el capitán B se equivocó en el 1^{er} lugar pero en el 2^{do} lugar no, por lo que está en contradicción con que los dos capitanes restantes se equivocaron en los tres lugares.

Caso II: Supongamos que el capitán B acertó que B ganaría y al equivocarse en los otros dos entonces A es 2do y C es 3ro, el capitán A se equivocó en el 1ro, en el 2do, pero el 3ro es correcto y también está en contradicción con el planteamiento del problema.

Caso III: El capitán C acertó el 1ro que es C, se equivocó en los otros dos, por lo tanto el 2do es A y el 3ro es B y al comprobar con los otros dos capitanes se equivocaron en los tres lugares, luego el que predijo el 1er lugar fue el capitán C y los lugares fueron C en 1ro, A en 2do y B en 3ro.

624. Debemos suponer que todos los barriles, los llenos, los semillenos y los vacíos, son iguales entre sí y nos queda claro que cada uno de los mercaderes debe recibir 7 barriles pues en total son 21 barriles y 3 los mercaderes. Nos queda por determinar la cantidad de vino que debe pertenecer a cada uno de ellos. Tenemos 7 barriles llenos y siete vacíos. Si fuera posible de cada barril lleno echar la mitad a uno de los vacíos entonces resultarían 14 barriles hasta la mitad (semillenos) añadiendo a ellos los otros 7 barriles semillenos, resultarían 21 barriles, cada uno con la mitad de vino, o sea 21 barriles semillenos; entonces, a cada mercader le tocarían 7 barriles semillenos de vino. Conociendo esto podemos dividir el vino en partes iguales sin pasarlo de un barril a otro de la siguiente forma:

	Barriles llenos	Barriles semillenos	Barriles vacíos.
Primer Mercader	2 (3)	3 (1)	2 (3)
Segundo Mercader	3 (3)	3 (1)	2 (3)
Tercer Mercader	3 (1)	1 (5)	3 (1)

Lo encerrado entre paréntesis es otra solución. Tener en cuenta que cuando tenemos dos barriles llenos son cuatros barriles semillenos y con los otros 3 semillenos tendría 7 barriles semillenos.

625. Es evidente que el problema se reduce a buscar un número que sea divisible por 7 (deja resto 0 al dividirlo por 7) y que además al dividirlo por 2, 3, 4, 5 y 6 deje resto 1. para ello debemos considerar la posibilidad de determinar el MCM (2, 3, 4, 5, 6)= $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

Debemos buscar un número que sea divisible por 7 y al mismo tiempo sea, en una unidad, mayor que un número que sea divisible por 60. este número se puede hallar realizando pruebas sucesivas y como 301 dividido entre 7 deja resto 0 y al dividirlo por 2, 3, 4, 5 ó 6 deja resto 1, entonces podemos concluir que la menor cantidad que resuelve el problema es 301. la cantidad mínima de huevo que podía llevar la mujer en la cesta era 301.

$$\begin{aligned}
(60+1) &= 8 \cdot 7 + \underline{5} \\
(120+1) &= 17 \cdot 7 + \underline{2} \\
(180+1) &= 25 \cdot 7 + 6 \\
(240+1) &= 34 \cdot 7 + 3 \\
(300+1) &= 43 \cdot 7 + \underline{0}
\end{aligned}$$

626. 19 triángulos y 15 cuadriláteros. (Para los cuadriláteros es necesario contar, además los cuadrados y los trapecios que se forman).

627. Como el número de teléfono de la escuela tiene los mismos dígitos que el número 1234 pero ninguno se encuentra en su lugar, entonces del teléfono de María (3102), que tiene solamente dos dígitos en su lugar, y como el 0 no es un número del teléfono, es lógico que entre el 1, 2 y el 3 hay dos que están en su lugar y el otro hay que permutarlo por lo que podemos diferenciar tres casos:

Caso I: si fijamos el 3 y el 1, entonces el 2 es necesario cambiarlo y su lugar lo ocupará el 4 y el número será 3124, que no puede ser por estar en contradicción con la condición de que el 4 no puede estar en las cifras de las unidades.

Caso II: Fijemos el 1 y el 2, entonces cambiando el 3 de lugar y colocando el 4 nos queda el número 4132, que no puede ser por estar en contradicción con la condición de que el 3 no puede estar en las cifras de las decenas.

Caso III: Fijando el 3 y el 2 entonces permutamos el 1 e incluimos el 4 y obtenemos el número 3412 que satisface las condiciones del problema y concluimos que el número de teléfono de la escuela es 3412.

628. El número de la casa es: ___ ___ 4 ___ ___, la mitad de la tercera cifra es 2 y los números de dos cifras donde la suma de sus cifras básicas es 2, son 11 ó 20, luego como 11 es el menor de

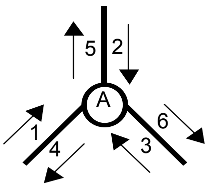
estos números, el número sería 11420. para hallar el número de teléfono se descompone en factores primos el 114, que son los tres primeras cifras del número de la casa. Los factores son 2, 3 y 19, y agrupándolos de menor a mayor se obtiene el número 2319, que precedido del número 20 (dos últimas cifras del número de la casa), forman el 202319 que es número telefónico buscado.

629. Basta con establecer una proporción:

$$\left.\frac{x}{y}=\frac{3}{15}\right\}\Rightarrow\left.\frac{3}{15}=\frac{x}{25}\right\}\Rightarrow x=\frac{3\cdot 25}{15}\Rightarrow x=5$$

R/ El valor de *x* es 5

630. Como en ese país el número de ciudades es finito y cada ciudad está conectada por carretera con otras tres ciudades y no hay otras carreteras, entonces es evidente que existen solo 6 modos de entrar y salir de una ciudad cualquiera. Si hay *n* ciudades y el turista visita $6n+1$ se puede asegurar que en alguna ocasión el turista ha recorrido siete veces las carreteras de una ciudad, luego ha entrado y salido en la misma forma en una ocasión, por lo que se puede asegurar que visitando $6n+1$ ciudades el turista vuelve necesariamente a la misma ciudad A.



631. Son varios los que promedian las velocidades y dicen que la velocidad debe ser de 12,5km/h, pero lógicamente están equivocados pues en realidad se deben hacer el siguiente análisis:
Si a 15km/h está en camino 2 horas más estaría la misma cantidad de horas que cuando va a 10km/h y recorrería 30km más que lo que recorría en realidad, en una hora recorre 5km más y estaría en camino $\frac{30}{5}=6$ horas, por lo que la carrera durará $6-2=4$ horas corriendo a 15km/h y la distancia recorrida es $15\cdot 4=60km$, como es una hora menos entonces sería $\frac{60km}{5h}=12km/h$.
Otra vía:
Denotemos por *t* el tiempo que emplearía el corredor si llegara a su destino a las 12 meridiano. De los planteamientos del problema tenemos la ecuación:

$10(t+1)=15(t-1)$ $\qquad 25=5t$

$10t+10=15t-15$ $\qquad t=5h$

De donde la distancia recorrida es de $10\cdot 6=15\cdot 4=60km$ por lo tanto la velocidad que debe mantener para llegar al sitio a las 12 m es $\frac{60}{5}=12km/h$.

632. A partir de la condición de que Juan y el lanzador festejan el cumpleaños de Miguel se infiere que el lanzador no puede ser otro que Pedro y como Juan no es jardinero derecho entonces lo es Miguel y Juan es el jardinero izquierdo.

633. La niña que tiene la blusa violeta debe llamarse Rosa o Blanca porque ninguna lleva blusa con el color de su nombre, como la otra niña que habla dice que se llama Blanca, entonces la de la blusa de color violeta se llama Rosa, y como la que se llama Blanca no puede usar la blusa blanca, ni es la de la blusa violeta entonces tiene la blusa rosa y Violeta tiene la blusa blanca. Por tanto la niña de la blusa rosa se llama Blanca, la de la blusa blanca se llama Violeta y la de la blusa violeta se llama Rosa.

634. Como Carlos es el alumno de Dalia y Alberto no es alumno de Félix entonces Alberto solo puede ser alumno de Estela, que es el alumno que buscamos, solo nos falta determinar en qué aula se encuentra.
Conocemos que se encuentra en el aula cuyo número es igual a la suma de las edades de los tres alumnos y además dos estudiantes tienen la misma edad y el otro un año más, entonces se cumple que:
x $\rightarrow$ edad de Alberto.
a $\rightarrow$ número del aula en que se encuentra
$x+x+x+1=a\Rightarrow 3x+1=a$
De aquí se verifica que el número del aula en que se encuentra es múltiplo de 3 más una unidad y eso es solo posible en el aula 49, el alumno de Estela es Alberto y se encuentra en el aula 49.

Con las proposiciones que se dan se pueden obtener todos los elementos del problema, se sugiere al lector completar los elementos que faltan y que aparecen en la siguiente tabla.

alumno	edad	Profesor de Matemáticas	Aula	Profesor que cuida
Carlos	17	Dalia	48	Félix
Alberto	16	Estela	49	Dalia
Beatriz	16	Félix	50	Estela

635. Este es un problema que fue publicado en Francia en el año 1484. para darle solución al mismo debemos partir de que el carpintero ni gana ni pierde dinero entonces se debe cumplir que:

Sea $x \rightarrow$ días trabajados.

$30 - x \rightarrow$ días que no trabaja.

$$5{,}50x = 6{,}60 \cdot (30 - x) \qquad 121x = 66 \cdot 30 \qquad x = \frac{180}{11}$$

$$55x = 66 \cdot 30 - 66x \qquad x = \frac{66 \cdot 30}{121} \qquad x = 16\,{}^{4}\!/_{11}\,días$$

$$55x + 66x = 66 \cdot 30$$

R/ El carpintero trabajó $16\,{}^{4}\!/_{11}$ días

636. La cuenta está mal sacada pues en la operación de $3 \cdot 9 = 27$ se contemplan los 25 pesos que están en la caja y los dos con que se quedó el camarero, por tanto sería incorrecto volver a sumar a esa cifra (27) los dos pesos con que se quedó el camarero. Lo correcto sería sumar los 25 pesos que costaba la habitación más los dos que se quedó el camarero más los tres devueltos a los amigos que esos sí suman 30 pesos, por lo que no existe realmente ningún peso perdido.

637. Como existen 900cm^3 de aceite de girasol y 250cm^3 de aceite de maní, se tienen 1150cm^3 de mezcla y como 1cm^3 = 1ml y la botella tiene una capacidad de 1500 ml entonces lo que le falta de aceite de maíz es 1500ml – 1150ml = 350ml, lo que representa el $\frac{350}{1500} = \frac{7}{30}$ del total.

638. Si dibujas la herradura mediante una línea en forma de arco, como por regla general se hace, por mucho que se piense no se conseguirá partirlo con dos líneas rectas, más que en cinco partes, como muestra la figura a, otra cosa es cuando se dibuja la herradura mostrando su anchura como es en realidad una herradura, entonces se encontrará la solución siempre que la intercepción de sus corte este dentro de la anchura y además corte la herradura en otra parte como muestra la figura b.

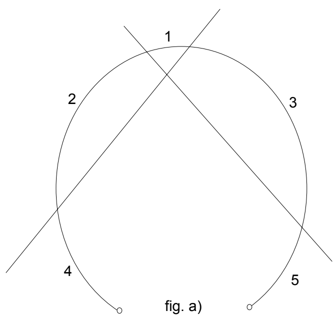


fig. a)

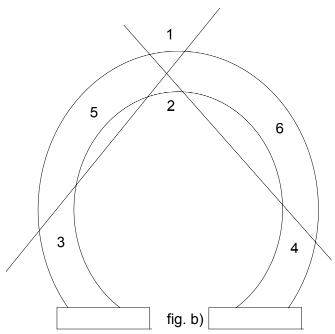
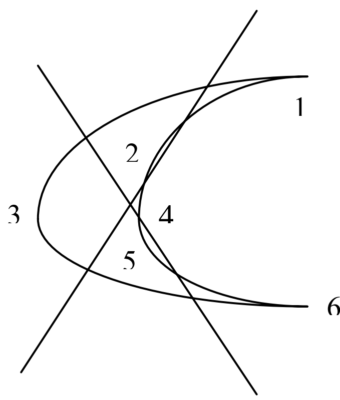


fig. b)

639. Se procede de la misma forma que en el ejercicio anterior, por lo que se puede dividir en 6 partes como indica la figura:



640. El reloj ordinario da un número de campanadas igual al número de horas que marca, de ahí que la máxima cantidad de campanadas sea 12, por lo que el problema se reduce a determinar la suma de los 12 primeros números naturales:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 12 = \frac{12 \cdot (12 + 1)}{2} = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78 \text{ campanadas.}$$

Pero recuerde que el día tiene 24 horas por lo que será 2 veces esta suma, $78 \cdot 2 = 156$ campanadas. Si el reloj también da una campanada para marcar las medias horas debemos sumarles 24 campanadas más y nos dará 156 + 24 = 180 campanadas

641. Por su puesto que el campesino debe pasar con la cabra a la otra orilla y regresa a la primera solo, aquí toma el lobo y pasa con él a la otra orilla, lo deja en ella y coge la cabra, con la que regresa a la primera orilla, deja en esta a la cabra y toma el mazo de hierba, en la otra orilla deja el mazo de hierba con el lobo y regresa a donde está la cabra para pasar con ella a la otra orilla. De tal forma la travesía del río concluye con éxito.

642. Supongamos que esto es posible y que se necesitan

x monedas de 50 centavos
y monedas de 20 centavos
z monedas de 5 centavos

$$\begin{array}{l} x+y+z=20 \\ \underline{50x+20y+5z=500} \end{array} \qquad \begin{array}{l} x+y+z=20 \\ \underline{10x+4y+z=100} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 9x+3y=80 \\ 3x+y=\dfrac{80}{3} \end{array}$$

Pero *3x* (3 veces el número de moneas de 50 centavos) es un número entero, *y* (número de monedas de 20 centavos) es un número entero y la suma de 2 entero no puede ser nunca un número mixto ($26\tfrac{2}{3}$) nuestro supuesto de que el problema tenía solución nos lleva, como se ve, al absurdo y el problema no tiene solución.

El lector siguiendo este procedimiento se convencerá de que los otros dos problemas tampoco tienen solución.

El segundo problema nos lleva a las ecuaciones:

$$\begin{array}{l} x+y+z=20 \\ \underline{50x+20y+5z=300} \end{array} \qquad \begin{array}{l} x+y+z=20 \\ \underline{10x+4y+z=60} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 9x+3y=40 \\ 3x+y=\dfrac{40}{3} \end{array}$$

y el tercero nos dará

$$\begin{array}{l} x+y+z=20 \\ \underline{10x+4y+z=40} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 9x+3y=20 \\ 3x+y=\dfrac{20}{3} \end{array}$$

Y ambas son insolubles pues la suma de dos números enteros no puede dar nunca un número mixto. Por lo que en ninguno de los 3 casos se puede cambiar esas cantidades en esas monedas.

643. He aquí una solución:

$888+88+8+8+8=1000$

644. He aquí dos soluciones: $24=22+2=3^3-3$

645. Indiquemos tres soluciones:

$$30=6\cdot 6-6=3^3+3=33-3$$

646. Se puede contestar fácilmente al cabo de cuantos días se reunirán en la escuela los cinco círculos a la vez, si sabemos encontrar el menor de todos los números que se divida exactamente por 2, 3, 4, 5 y 6. Es decir el mínimo común múltiplo de estos números. Es fácil comprobar que el número es 60. es decir el día primero de marzo (el año no es bisiesto) se reunirán de nuevo los cinco círculos: el de Geometría a los 30 intervalos de 2 días; el de álgebra a los 20 intervalos de 3 días; el de análisis a los 15 intervalos de 4 días; el de aritmética a los 12 intervalos de 5 días y el de informática a los 10 intervalos de 6 días. Antes de 60 días no habrá un nuevo encuentro, pasados otros 60 días vendrá otro semejante, pero ya en el segundo trimestre. Así pues en el primer trimestre hay solo un día en el que se reunirán los 5 círculos a la vez: el primero de marzo.

647. Para resolver este problema hay que saber en que casos un número es divisible por 11: un número es divisible por 11, si la diferencia entre la suma de los valores absolutos de las cifras colocadas en los lugares pares y la suma de los valores de las cifras colocadas en los lugares impares, es divisible por 11 ó igual a cero. Así por ejemplo 352049786 es divisible por 11, pues, 3+2+4+7+6=22 y 5+0+9+8=22 y la diferencia es 22-22=0. el mayor de todos los números de 9 cifras que es divisible por 11 es 987652413 y el menor es 102347586.

648. a) Las cifras que faltan se determinan poco a poco utilizando el siguiente método deductivo. Para mayor comodidad numeramos los términos:

* 1 * (primer factor)- (1)
3 * 2 (segundo factor)- (2)
* 3 * (primer producto)- (3)

3 * 2 * (segundo producto)- (4)
* 2 * 5 (tercer producto)- (5)
1 * 8 * 30 (resultado)- (6)

Es fácil determinar que el último asterisco (*) (de izquierda a derecha) de (3) es un cero, por ser también cero la última cifra de (6).

A continuación se determina el valor del último asterisco de (1), éste es una cifra que multiplicada por 2 da un número que termina en cero y al multiplicarla por 3 da un número que termina en 5 (5); el 5 es la única cifra posible.

Luego está claro que al final de (4) se encuentra la cifra cero, pues 3 + * = 3 y el asterisco tiene que ser cero.

Es fácil adivinar que el asterisco de (2) es un 8, porque sólo al multiplicar este número por 15 da como resultado un número terminado en 20 (4).

Ahora, nos queda claro el valor del primer asterisco de (1); éste es un 4, porque solo este número multiplicado por 8 da un producto que empieza por 3 (4).

No presentan dificultades algunas, determinar las restantes cifras desconocidas, basta multiplicar los números de (1) y (2), que ya están completos para determinar los demás valores.

```
415·382
 830
3320
1245
158530
```

En definitiva resuelta la multiplicación que aparece a la derecha y arriba (página anterior).

b) El valor que sustituye a los asteriscos en este problema se averigua siguiendo un procedimiento deductivo, semejante al utilizado para el inciso anterior. Y tenemos que:

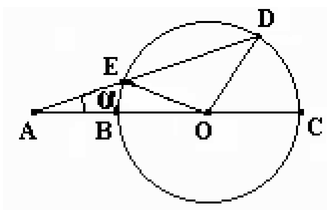
```
325 ·147
 2275
1300
325
47775
```

649. La división buscada, siguiendo el procedimiento deductivo del ejercicio anterior es:

```
52650 | 325
325     162
2015
1950
0650
650
000
```

650. De acuerdo a las situaciones planteadas, podemos arribar a la conclusión de que Salvador, Amado y Jesús son hermanos y son los que recogen los mangos, como los demás se dirigen al lago ellos son Enrique, Guillermo y Luís, pero Enrique y Guillermo son hermanos y como Enrique es tío de los que recogen mangos, y uno de ellos es el padre de Luís, entonces el abuelo de Luís es Guillermo.

651. Para dar solución a este problema es necesario hacer una construcción auxiliar, construir el radio $\overline{OE}$, de aquí obtenemos dos triángulos isósceles; $\Delta\ AEO$ de base $\overline{AO}$ y el $\Delta\ EOD$ de base $\overline{ED}$, aquí tenemos que el $\angle\ AOE = \alpha$ por ser ángulos bases del triángulo isósceles, además el $\angle\ DEO$ es un ángulo exterior del triángulo ΔAOE, por tanto este es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a él, por lo que tenemos que $\angle\ AOE = 2\angle\ \alpha$, pero, además el $\angle ODE = \angle\ AOE = 2\angle\ \alpha$, por ser ángulos bases de triángulo isósceles y como el $\angle COD$ es exterior al $\Delta\ AOD$ se cumple que:



$$\angle AOD = \angle OAD + \angle ODE$$
$$\angle AOD = \angle\alpha + 2\angle\alpha$$
$$63^0 = 3\angle\alpha$$

$$\alpha = \frac{63^0}{3}$$
$$\alpha = 21^0$$

R/ El ángulo mide 21^0

652. Este problema lo resolveremos con ayuda de la geometría, aunque a primera vista parezca que este no tiene relación con la geometría; pero en eso estriba precisamente el dominio de esta ciencia, saber descubrir los principios geométricos en que están fundados los problemas cuando se encuentran ocultos entre otros detalles. De todos es conocidos que el diámetro de las ruedas delanteras es menor que el de las traseras. En un mismo recorrido, el número de vueltas que dan las ruedas pequeñas es siempre mayor que el que dan las ruedas traseras. En la rueda pequeña, el perímetro de la circunferencia exterior es menor que la grande, por lo cual cabe más veces en la longitud dada. Se comprende por lo tanto, que en cualquier recorrido que haga la carreta, las ruedas delanteras darán más vueltas que las ruedas trasera, y naturalmente a mayor número de revoluciones, el desgaste del eje será mayor.

653. Se equivocan los que piensan que a través de la lupa el ángulo resulta aumentado cuatro veces y plantean que tiene una amplitud de $1\frac{1}{2}\cdot 4=\frac{12^0}{2}=6^0$ pues en realidad la magnitud del ángulo no aumenta en lo más mínimo al mirarlo a través de la lupa. Es cierto que el arco del ángulo que se mide aumenta, sin duda alguna, pero en la misma proporción aumentará también el radio de dicho arco, de modo que la amplitud del ángulo central quedará invariable.

654. La respuesta de que el ladrillo de juguete pesa 1Kg, o sea, la cuarta parte, es una gran equivocación. El ladrillo de juguete no solo es cuatro veces más corto que el ladrillo de verdad, sino que también es cuatro veces más estrecho y cuatro veces más bajo, por lo tanto, su volumen y peso son $4\cdot 4\cdot 4=64$ veces menores, por lo tanto como 4Kg. = 4000g, el ladrillo de juguete pesará: $\frac{4000}{64}=62{,}5\,g$.

655. De forma semejante al ejercicio anterior y en virtud de que las figuras humanas son aproximadamente semejantes, entonces al ser la estatura dos veces mayor. Esto quiere decir que el gigante es 8 veces más pesado que el enano.

656. La relación existente entre las longitudes de las circunferencias es igual a las de sus diámetros. Si la circunferencia de un melón mide 60cm y la del otro 50cm, la relación entre sus diámetros será 60:50 =6:5 y la relación entre los volúmenes será $\left(\frac{6}{5}\right)^3=\frac{216}{125}=1{,}73$

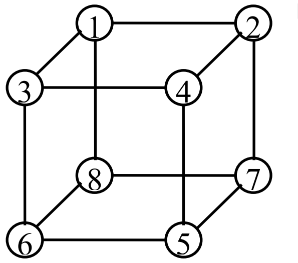
Si valoramos el costo del melón con arreglo a su peso, entonces el melón mayor debe costar 1,73 veces más que el menor y en realidad por él se pide 1,50 veces más que por el otro, luego es más convincente comprar el melón mayor.

657. Como muestra la figura se cumple que:

$3+4+5+6=2+4+5+7=$

$=1+2+7+8=1+3+6+8=18$

Pero además se cumple que:



$$\frac{(1+2+3+4)+(5+6+7+8)}{2}=\frac{10+26}{2}=\frac{36}{2}=18$$ Con lo cual se satisfacen las condiciones del problema.

658. Primero determinaremos cuanto le cuesta el canal: $132\cdot 75=9900\$$. Para determinar lo que ellos reunieron debemos partir de que una tonelada equivale a 1000kg, de aquí tenemos que las tres toneladas de malangas ganaban, $3000\cdot 2=6000\$$, de calabaza $2000\cdot 1=2000\$$, y de ajo $500\cdot 3=1500\$$, todo esto suma 6000+2000+1500 = 9500$, y como el canal cuesta 9900$ entonces a la cooperativa le faltan 9900 - 9500 = 400$ para poder pagar el canal.

659. Evidentemente como la mesa es la misma, y al papá de Ernesto contar una menor cantidad de palmas que la mamá es seña de que el palmo del papá es mayor que el de la mamá, o sea, que estamos en presencia de una proporción inversa, donde al disminuir la cantidad de palmos, aumenta la longitud del palmo, o sea: $\frac{9}{12}=\frac{21}{x}$. De aquí tenemos que $x=\frac{12\cdot 21}{9}=28$. El palmo del papá de Ernesto mide 28cm.

660. Como los árboles deben estar a 4 m uno del otro y del primero al último hay 64, entonces se deben plantar $64\div 4=16$, pero como el primero y el último ya están plantados, entonces solo se tienen que plantar 14 árboles.

661. Si se aumenta el primero en 7 decenas, se aumenta en 70, si al segundo se aumenta en 25 centenas se aumenta en 2500 y si al tercero se aumenta en 9 unidades de millar se aumenta en 9000, por lo tanto la suma aumenta en: $9000+2500+70=11570$.

662. Al número 56565 si se le intercalan dos ceros entre las cifras de las decenas y de las centenas, obtenemos el número 5650065, por lo que el número aumenta 5650065 - 56565 = 5593500, ahora como lo que nos piden es la cantidad de centenas en que aumenta su valor este es de: 55935 centenas.

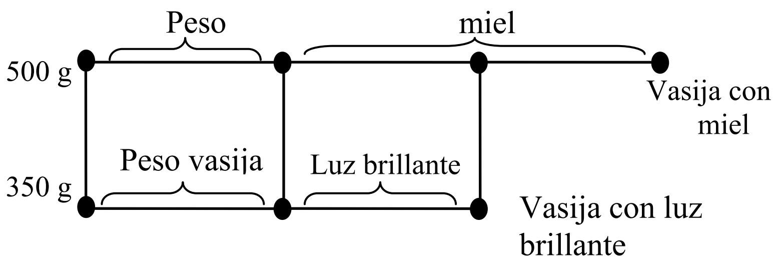
663. El primer avión vuela durante 6 horas a velocidad de 275Km/h por lo tanto ha recorrido $275 \cdot 6 = 1650$ Km/h y el segundo ha recorrido durante 4 horas a 313Km/h una distancia de $313 \cdot 4 = 1252$ Km, y como salen del mismo punto y en sentido contrario entonces a las 12 m se encuentra uno del otro a una distancia de: 1650 + 1252 = 2902Km.

664. De acuerdo con las condiciones del problema como el número es capicúa y tiene más de una unidad de millar y menos de tres, entonces tiene la forma: $\overline{2aa2}$, esos son 10 números nada más, pero como tienen que ser múltiplos de cuatro (las dos últimas cifras divisibles por 4), entonces solo tenemos los números 2112, 2332, 2552, 2772 y 2992, pero como además no puede ser divisible por tres (la suma de sus cifras son un múltiplo de 3), entonces no puede ser el 2112, ni el 2772 por lo que solo cumplen con todas las condiciones el 2332, el 2552 y 2992 luego la que tiene la razón es Olga.

665. Ambas cacerolas son dos cuerpos geométricamente semejantes. Si la cacerola grande tiene una capacidad 8 veces mayor, todas sus dimensiones lineales tendrían el doble de longitud: será el doble de ancho y doble de alto en ambas direcciones. Siendo el doble de ancho y doble de alto su superficie será $2 \cdot 2 = 4$ veces mayor, puesto que la relación entre las superficies de los cuerpos semejantes es igual a la de los cuadrados de sus dimensiones lineales. Si las paredes tienen el mismo espesor, el peso de las cacerolas depende de las áreas de sus superficies respectivas. Esto nos da respuesta a la pregunta formulada en el problema: la cacerola grande es cuatro veces más pesada que la pequeña.

666. Puede parecer que este problema no esté relacionado con las matemáticas, pero este problema se resuelve basado en razonamientos geométricos, de modo semejante al ejercicio anterior. Antes de resolver el problema, analicemos la siguiente situación. Si tenemos dos vasijas de forma semejante y del mismo material y una es n veces más alta y más ancha y se llenan de agua hirviendo ¿cuál se enfriará primero?, si la superficie de una es n^2 veces mayor su volumen es n^3 veces mayor también, por lo que a la vasija mayor le corresponde, por cada unidad de superficie, un volumen n veces mayor. Por consiguiente la vasija menor debe enfriarse primero. Por la misma causa el niño al frío debe sentirlo más que la persona mayor, si ambas están igualmente abrigadas, puesto que la cantidad de calor que se origina en cada cm^3 del cuerpo, es en ambos casi idéntica, sin embargo la superficie del cuerpo que se enfría, correspondiente a $1cm^3$, es mayor en el niño que en la persona adulta. Así se explica porqué se enfrían con más intensidad y con mayor frecuencia los dedos de las manos y la nariz que otras partes del cuerpo.

667. Podemos apoyarnos en el siguiente modelo para resolver el problema:



Debemos determinar cuánto pesa la vasija, pero no sabemos cuánto pesa la miel ni cuánto pesa el luz brillante, pero si podemos determinar el exceso de la vasija con miel sobre la vasija con luz brillante que es: $500 - 350 = 150g$. Pero a partir del modelo y de las condiciones dadas, como la miel pesa el doble que la luz brillante, el exceso hallado es exactamente lo que pesa la luz brillante y entonces podemos determinar cuanto pesa la vasija restando $350 - 150 = 200g$.

Se puede comprobar que el doble de 150 es 300 y 300 + 200 = 500g que pesa la vasija con miel y que 150 + 200 = 350g es lo que pesa la vasija con luz brillante y el peso de la miel es el doble de la luz brillante.

Luego se puede concluir que el peso de la vasija es de 200g.

Este problema se puede resolver por un sistema de ecuaciones.

Sea: x el peso de la vasija.

y el peso de la luz brillante.

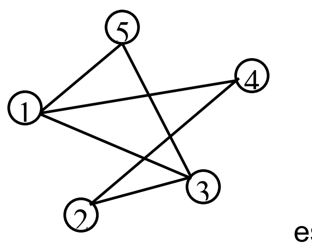
$2y$ el peso de la miel.

$$\begin{array}{r} x+2y=500 \\ \underline{x+\ \ y=350} \\ y=150 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x+y=350 \\ \ \ y=350-150 \\ \ \ x=200\ g \end{array}$$

668. Si tomamos los doce primeros tornillos y colocamos 6 y 6 en la balanza, y como tienen que estar en equilibrio, al sustituir alguno de estos por el que queda afuera tiene que ser igual al que se sustituye, cuando repetimos el proceso estos tienen que ser también iguales, así sucesivamente hasta que se llega a que efectivamente para que la balanza esté en equilibrio todos los tornillos tienen que tener el mismo peso.

669. Queda claro que para que la suma de las cifras básicas de un número sea 28, este número debe ser de cuatro cifras, y en este caso el menor número de cuatro cifras que estas suman 28 es el 1999, ahora nos hace falta determinar si es primo o no, y como se puede comprobar, este número es primo, por lo tanto el menor número primo cuyas cifras suman 28 es el 1999.

670. El número total de veces que las manos han sido estrechadas hasta el presente es un número par, porque en cada estrechón de manos participan dos personas, además este número es igual a la suma de los estrechones de manos dado por cada persona individuamente, como esta suma es un número par, la cantidad de personas que han estrechado las manos un número impar de veces tiene que ser par.



Aquí hay dos personas que se han estrechado las manos un número impar de veces que son 1 y 3, y es una cantidad par de personas que se han estrechado las manos un número impar de veces.

671. Después de un buen razonamiento se puede concluir que el único número que satisface todas las condiciones del problema es: 6210001000, tiene 10 cifras, tiene 6 ceros, dos unos, un dos y un 6, de acuerdo con las condiciones planteadas en el problema.

672. Se deben formar dos subconjuntos:

$$A_1=\{1,3,4,5,7,9,11,12,13,15,16,17,19,20,21...\}$$

$$A_2=\{2,6,8,10,14,18,22...\}$$

En A_1 ubicamos todos los impares, para ubicar números pares se procede del siguiente modo: el número par 2*n* será ubicado en A_1, si *n* está en A_2 o en A_2 si *n* está en A_1.

673. Los que pensaron que el piñón gira tres veces se equivocan, pues, dará cuatro vueltas.
Si se quiere convencer, tome dos monedas iguales, fije una y haga rodar por su borde la otra, cuando la moneda que gira haya recorrido media circunferencia de la fija habrá dado la vuelta completa alrededor de su eje, lo que se puede comprobar por la posición de la cifra de la moneda, por lo que al dar la vuelta completa alrededor de la moneda fija, la móvil dará dos vueltas y no una.
De forma general si un piñón tiene n dientes y una rueda dentada $k\cdot n$ dientes, el piñón girará sobre su eje exactamente $\mathrm{k}+1$ veces al dar una vuelta completa alrededor de la rueda dentada.

674. En este tipo de problema se le debe pedir resolver el inciso a) primero, se pueden percatar sin problema que Pablo es mayor que Juanita, y Alberto es mayor también que Juanita, pero no nos dicen nada de la relación entre Pablo y Alberto, luego con los datos que nos dan no es posible resolver el problema.
Luego se le puede plantear el inciso b) en el cual el primer planteamiento es falso y las dos últimas son una reiteración de lo dado en el problema y solo el segundo es el dato que nos hace falta, luego se puede concluir que el mayor es Alberto que nación antes de Tomás.

675. Representamos con *P* los pares e *I* para los impares y tenemos:

$$\begin{array}{c} I \\ I\ \ I\ \ I \\ I\ \ P\ I\ \ P\ldots \\ I\ \ I\ \ P\ \ I\ldots \\ I\ \ P\ P\ P\ldots \\ I\ \ I\ \ I\ \ P\ldots \\ I\ \ P\ I\ \ P\ldots \end{array}$$

…….

Nótese que la séptima fila del arreglo coincide con la tercera fila. Pero la paridad o imparidad de los cuatro primeros elementos de cada fila del triángulo numérico depende solamente de paridad o imparidad de los cuatro términos de la fila precedente. Por tanto en el arreglo anterior cada fila siguiente, como en las cuatro primeras filas a partir de la tercera, aparece un número par, entonces tiene que aparecer un número par en cualquiera de las filas subsiguientes, como se muestra.

676. En la relación de los estudiantes A y B pueden darse tres situaciones distintas:

A y B están en la misma columna, como A es el menor estudiante de su columna, su edad es menor que la de B.

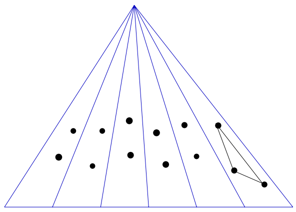
A y B están en la misma fila, como B es el mayor de su fila, es mayor también que A.

A y B están en diferentes fila y columna, sea C el estudiante que está en la intersección de la columna de A con la fila de B. Entonces la edad de C es mayor que la de A y menor que la de B, de donde se obtiene que la edad del estudiante A es menor que la de B.

677. Si agrupamos 33 personas con la misma cantidad de pelos desde el calvo (o pelo) hasta el más peludo aproximadamente 300 000 tendríamos $33 \cdot 300000 = 9900000$ y es fácil convencerse que al escoger otra persona más debemos ubicarla en uno de los grupos formados por lo que es fácil asegurar que en Cuba existen al menos 34 personas que tienen la misma cantidad de pelos, pues en estos momentos somos algo más de 11000000 de habitantes.

678. Como el número de factores (a_1-1), (a_2-2)… (a_n-n) es impar y la suma de todos los factores es evidentemente cero, que es un número par, por lo que se deduce que es imposible que todos los factores sean impares, por lo que la cantidad de factores impares tiene que ser un número par y al menos un factor tiene que ser par y por su puesto el producto tiene que ser par.

679. Considerando un triángulo cualquiera de 18cm^2 de área, si hacemos una división de la base del mismo en 6 segmentos de igual longitud y de cada uno de los extremos de estos segmentos trazamos otros hasta el vértice opuesto a la base del triángulo obtenemos 6 triángulos de 3cm^2 de área cada uno como muestra la figura. Si distribuimos 13 puntos en estos triángulos de forma aleatoria, al menos tres de los puntos estarán situados en un mismo triángulo y en ese caso tendrán un área menor o igual (cuando los puntos coinciden con los vértices) que la de ese triángulo, es decir, menor o igual que 3cm^2.



680. El matemático razonó que las listas de los hombres cuyas mujeres les eran infieles debían tener un nombre menos; de ahí que les dijese a los hombres que iría diciendo los números uno a uno y lentamente y que cuando dijera el número de mujeres que ellos tenían en sus listas debían salir a eliminarlas y comenzó: cero, uno,**...** Al decir el número de mujeres infieles menos uno, un grupo de hombres salió corriendo a eliminar a sus esposas. Luego el matemático dijo a los que quedaron que podían irse tranquilos, que sus esposas les eran fieles.

681. De acuerdo a las condiciones del problema se tiene una sucesión aritmética donde:

$$A_1 = 6 \quad d = 25 \quad An = 1956$$

$$A_n = a_1 + (n-1) \cdot d \Rightarrow n = 79$$

El conjunto será: 6, 31, 56, 81,…1881, 1906, 1931, 1956 se pueden formar 40 parejas que sumen 1987 por Ej. (6; 1981); (31; 1956); (56; 1931)…(981; 1006).

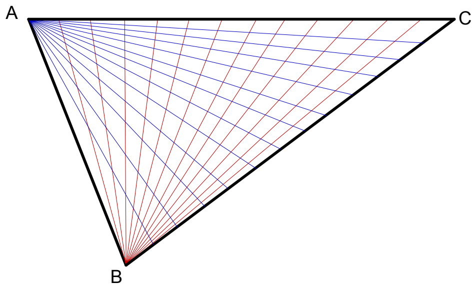
Por lo tanto nosotros podemos relacionar 40 elementos de este conjunto sin que tengamos un par de ellos que sumen 1987, pero como el subconjunto que debemos seleccionar debe tener más de 40 elementos, necesariamente el elemento 41 debe formar pareja con al menos uno de los 40 anteriores y sumar 1987. Por lo general se pueden seleccionar los 40 primeros o los 40 últimos y no tener la posibilidad de tener dos que sumen 1987, pero cuando tenemos el próximo elemento tiene que pertenecer a una de las 40 parejas tomadas inicialmente y cada una de ella siempre suman 1987.

682. El total de subconjuntos no nulos que se pueden formar son: $2^{10} - 1 = 1023$. La menor suma es 10+11+…+19=145 y la mayor 90+91+…+99=945. El total de sumas es 945-145+1= 801, como existen 1023 subconjuntos y solo hay 801 sumas, al menos dos conjuntos tiene la misma suma. Ahora para saber si esos dos subconjuntos son disjuntos o no, tenemos que:

Sea A’ y B’ dos de los subconjuntos que tiene la misma suma (como no sabemos si son disjuntos o no) entonces sean A y B tal que: A = A´ \ (A´ $\cap$ B´) y B = B´ \ (A´ $\cap$ B´). Es decir A y B son disjuntos.

A y B son disjuntos, A y B son subconjuntos del conjunto dado por serlo A´ y B´. Los elementos de A y B tienen la misma suma porque los de A´ y B´ tiene la misma suma y para formar A y B se le quitan los mimos elementos. Un ejemplo:
A = {10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 34}
B = {10, 11, 12, , 15, 16, 17, 18, 19, 23, 24}

683. Es necesario tener en cuenta que cuando trazamos doce segmentos desde el vértice al lado opuesto de un triángulo se forman 13 regiones (aunque algunas resulten pequeñas), al trazar al otro vértice el triángulo ha quedado dividido en 169 regiones.



684. Para determinar los valores de n es suficiente resolver las desigualdades que nos presentan, de aquí tenemos que:

$$\frac{2}{5}\langle\frac{n}{17}\langle\frac{11}{13} \quad /\cdot 17$$
$$\frac{2\cdot 17}{5}\langle n\langle\frac{11\cdot 17}{13}$$
$$\frac{34}{5}\langle n\langle\frac{187}{13}$$
$$6\,{}^{4}\!/_{5}\langle n\langle 14\,{}^{5}\!/_{13}$$

Los enteros positivos que satisfacen la desigualdad son: 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, y 14; luego son 8 enteros positivos en total.

685. Sabemos que el último dígito de una suma está determinado por la suma del último dígito de cada uno de los sumandos. En este caso podemos observar lo siguiente:
$1! = \underline{1}$ $\quad 2! = 1\cdot 2 = \underline{2}$ $\quad 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = \underline{6}$ $\quad 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 2\underline{4}$ $\quad 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 12\underline{0}$
$6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 72\underline{0}$; …
Y así sucesivamente, podemos ver que la última cifra de todas las demás siempre es cero, por lo que el último dígito de la suma está determinado por los cuatro primeros sumandos que nos indican que $\underline{1} + \underline{2} + \underline{6} + 2\underline{4} = 3\underline{3}$; por lo que podemos concluir que el último dígito de la suma 1! + 2! + 3! + … + 2002! es $\underline{3}$.

686. Considerando el número original como A y el triplo de él como B se tiene 3A = B, puesto que el 1 de A es llevado al final de B, se tiene que: la última cifra de A es 7 para que la última de B sea 1$(3\cdot 7 = 21)$, la penúltima de A es 5 para que la última de B sea 7$(3\cdot 5 + 2 = 17)$, la que antecede en A es 8 para que la de B sea 5 $(3\cdot 8 + 1 = 25)$, la anterior de A es 2, para que en B sea 8 $(3\cdot 2 + 2 = 8)$, la anterior en A es 4, para que en B sea $(3\cdot 4 = 12)$ y la primera de A es 1 (condición del problema) y la primera de B es $(3\cdot 1 + 1 = 4)$, luego el número original es 142857. Se puede verificar que $142857\cdot 3 = 428571,$ que no es más que tomar la primera cifra de A (original) y ponerla al final de B, con lo que se satisfacen todas las condiciones del problema.

687. Entre 4000 y 5000 encontramos solamente 10 números ascendentes que son: 4567, 4568, 4569, 4578, 4579, 4589, 4678, 4679, 4689 y 4789; ninguno más.

688. Si hacemos un análisis detenido del problema, podemos determinar la ley de formación de la suma de los dígitos de cero hasta el número compuesto por *K* dígitos 9, observando que ésta tiene la forma $10^{k-1}\cdot 45\cdot k$; por ejemplo: en los números desde 0 hasta 99, los dígitos suman $10\cdot 45\cdot 2$ $\;(10^{2-1}\cdot 45\cdot 2)$; hasta el 999 suman $100\cdot 45\cdot 3\;(10^{3-1}\cdot 45\cdot 3)$; hasta el 9999 suman $1000\cdot 45\cdot 4$, hasta el 99999 suman $10000\cdot 45\cdot 5$ y hasta el 999999 suman $100\,000\cdot 45\cdot 6$ por lo que hasta 1000000 suman $100000\cdot 45\cdot 6 + 1 =$ (1000000 es el siguiente de 999999, y la suma de sus cifras es 1) $= 100000\cdot 270 + 1 = 27000001$.

689. El rectángulo debe conservar el ancho de 75 cm y ser equivalente a un cuadrado de 135 cm de lado por lo que el largo x del rectángulo será de:
$$(135)^2 = 75\cdot x \Rightarrow x = \frac{135\cdot 135}{75} \Rightarrow x = 243cm$$
Como el largo tiene que ser 243cm y tenía un largo de 145cm entones habrá que incrementarlo en 243 -145 = 98cm.

690. De acuerdo a lo que plantea el problema tenemos que:
Cabeza: 9cm.

Cola: *x*
cuerpo: *y*

$x = 9 + \frac{1}{2} y \quad (1)$

$y = 9 + x \qquad (2)$

$\text{sustituir (1) en (2)}$

$y = 9 + 9 + \frac{1}{2} y$

$y - \frac{1}{2} y = 18$

$\frac{1}{2} y = 18$

$y = 36cm$

$39 - 9 = x$

$x = 27cm$

$9 + x + y =$

$= 9 + 27 + 36 = 72cm$

R/ El lagarto mide 72cm en total.

691. De acuerdo con la primera condición Alberto correrá 100 metros en lo que Benito corre 80 metros. De la segunda se tiene que Benito corre 100 metros en lo que Camilo corre 75 metros. Alberto correrá 500 metros en lo que Benito corre 400 metros, mientras que Camilo corre 300.
De lo anterior se tiene que Alberto correrá 500 metros en lo que Camilo corre 300, o sea, Alberto corre 100 metros en lo que Camilo corre 60 metros, por lo que una ventaja justa será de 40 metros.

692. Denotamos las fábricas por 1, 2, 3, 4 y 5, echamos en el plato una pelota de la fábrica 1, dos de la 2, tres de la 3, cuatro de la 4 y cinco de la 5. Si todas poseen una libra tendríamos que 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 libras, pesarían todas las pelotas, pero una la altera en una libra de más entonces tenemos que si al pesar el resultado es 16 es la fábrica 1, la que produce la de dos libras, si es 17 libras es la fábrica 2, si es 18 es la 3, si es 19 es la 4 y si es 20 es la 5.

693. Procediendo de forma análoga al ejercicio anterior tenemos que tomar una moneda del primer saco, dos del segundo y así sucesivamente y tenemos que:
$10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 70 + 80 + 90 + 100 = 550$ luego, si pesa 549 el falso es el primer saco, si pesa 548 es el segundo saco y así sucesivamente hasta que si el peso es 540 que es el saco 10, luego él toma los nueve sacos de monedas verdaderas y deja el otro.

694. Es fácil contar que entre 1 y 155 existen 12 pares de números gemelos, ellos son: 3 y 5, 5 y 7, 11 y 13, 17 y 19, 29 y 31, 41 y 43, 59 y 61, 71 y 73, 101 y 103, 107 y 109, 137 y 139, y 149 y 151.

695. Queda claro que la suma de los números anotados por los muchachos debe ser igual a la suma de los números anotados por las muchachas. Como dentro de la lista hay un solo número que no es divisible por 3, no es posible hacer una división de la lista en dos grupos de siete sumandos y que las sumas sean iguales, por tanto, necesariamente, alguien se equivocó al escribir el número.

696. Cada estación debe preparar boletines para las restantes 24 estaciones por lo tanto se necesitan $25 \cdot 24 = 600$ boletines diferentes para abastecer las cajas de las estaciones.

697. Si se puede, siempre que consideremos fracciones negativas, donde el numerador de la primera sea negativo y en la segunda el denominador sea negativo, por ejemplo: $\frac{-2}{5} = \frac{6}{-15}$

698. Puesto que llevando la cifra dos al primer lugar el número se duplica, entonces, su penúltima cifra deberá ser $4\,(2 \cdot 2 = 4)$, la antepenúltima será $8\,(2 \cdot 4) = 8$, la que antecede a esta última será $6(2 \cdot 8) = 16$ la anterior a esta $3\,(1 + 2 \cdot 6) = 13$, después 7 $(1 + 2 \cdot 3) = 7$, y así sucesivamente, hasta que obtengamos un uno, pues nuestro número debe comenzar por 1, por lo que nos detendremos cuando después de la duplicación de la cifra y la adición de lo que se lleva nos de 1. Por lo que el número buscado es: 105 263 157 894 736 842.
Este es uno de los números, que satisfacen las condiciones del problema. Todos los demás (son infinitamente muchos) se puede obtener siguiendo el procedimiento indicado. Es fácil observar que cada uno de estos números estará compuesto por la combinaciones de cifras, ya halladas por nosotros, varias veces repetidas.

699. Se aprecia con facilidad que si al número buscado se le agrega una unidad, el resultado será divisible por 2, 3, 4, 5 y 6. El número más pequeño con esta propiedades es el 60 (el mínimo común múltiplo) y todos los números, con esta propiedad tiene la forma $60 \cdot k$ con k = 1, 2, 3,**...**, n, es decir, 60, 120, 180, 240,**...**; el número buscado es di visible por 7, entonces, en la serie indicada es preciso hallar un número que dividido por 7 tenga un resto igual a 1. Esta condición la satisface el número 120, así pues, el número buscado es 119, que es el menor que resuelve el problema pues: $119 \div 7 = 17$, pero al dividirlo por 2, 3, 4, 5 y 6 deja resto 1, 2, 3, 4 y 5 respectivamente.

700. Como el tren tiene una longitud de 300 m y el túnel una longitud de 1 500 m (1,5km) entonces debe recorrer por el túnel 300 m + 1500 m = 1800 m para pasar el túnel. Ahora como lleva una velocidad de 90km/h, o sea, 90 000 m/60min se cumple que:

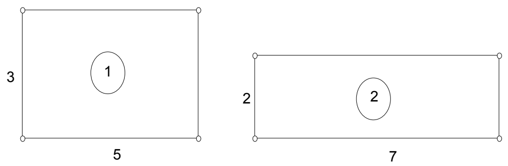
$$\begin{array}{lll} 90000 \text{ m} & \_\_\_\_\_ & 60 \text{ min} \\ 1800 \text{ m} & \_\_\_\_\_ & x \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1\,\text{min} \,\_\_\_\_\, 60\,\text{seg} \\ 0{,}2\,\text{min} \,\_\_\_\_\, \text{y seg} \\ \text{y} = 12\,\text{seg} \end{array}$$

$$x = \frac{1800 \cdot 60}{90000} \Rightarrow x = 6/5 \text{ min} \Rightarrow x = 1{,}2\text{min}$$

R/ El tren demorará 1min y 12 segundos en pasar el tunel.

701. Es preciso tomar cada naranja y regresar dónde está la cesta. Entonces, la cantidad de metros recorridos será dos veces la suma de los 100 primeros números, o sea, $2(1+2+3+4...100) = 2\frac{n\cdot(n+1)}{2} = 100\cdot 101 = 10100m$, esto supone caminar más de 10 km, por lo que resulta un método bastante fatigoso para recoger naranjas.

702. Si es posible. Ejemplo:



$$\begin{array}{ll} \text{En (1)} & \text{En (2)} \\ A_1 = 3\cdot 5 = 15 & A_2 = 2\cdot 7 = 14 \\ P_1 = 2\cdot(3+5) = 16 & P_2 = 2\cdot(2+7) = 18 \end{array}$$

y se cumple que: $A_1 > A_2$ pero $P_1 < P_2$

703. Nos apoyaremos en la siguiente tabla:

Múltiplos de 30	0	0	0	20	· ·	10	40	70
Múltiplos de 29	9	8	7	16	· ·	83	12	41

La diferencia va disminuyendo de 1 en 1 y ellos son iguales cuando $29\cdot 30 = 870$ (arriba) y en el siguiente $30\cdot 29 = 870$ (abajo), por lo tanto arriba (múltiplos de 30) se cumple $28\cdot 30 = 840$ y abajo (múltiplos de 29) en el siguiente tenemos el $29\cdot 29 = 841$ entonces tenemos dos números consecutivos (840 y 841) donde el primero (840) es múltiplo de 30 y el segundo (841) es múltiplo de 29.

704. Dividamos en 3 grupos de 4 monedas cada uno y analicemos los siguientes casos:

Caso 1:

- Tomo 4 en cada platillo, si se equilibran está en las otras 4. Tomo 3 de las que quedan fuera y otras 3 de la primera, si se equilibran es la otra que queda. Pesamos la que queda con cualquiera, si sube pesa (-), si baja pesa (+).
- Ahora, si en la primer pesada se equilibran, pero tomando 3 de estas con tres de la otra esta baja entonces pesa más, tomo dos de la otra si se equilibran es la otra, sino la que baja y pesa (+).
- Después de equilibrada las 4, tomo 3 de estas y 3 de las que quedan, si estas suben es una de ellas, tomo 2 y las peso, si se equilibran es la otra y pesa (-), sino es la que sube y pesa (-)

Caso 2.

- Tomamos 4 en cada plato si se desequilibran las que bajan las denotamos (+) (+) (+) (+) y las otras (-) (-) (-) (-), entonces tomamos (+) (+) (+) (-) ↔ (+) ( ) ( ) ( ) [tres monedas (+) y una (-) y en la otra una (+) y 3 de las que quedaban afuera]. Si bajan (+) (+) (+) (-) esta en las 3 (+), tomamos dos, si baja es esa, sino es la otra y pesa (+).
- Ahora si el que baja es (+) ( ) ( ) ( ), entonces es o la (+) o la (-), tomo una de ellas y la peso con la normal si se equilibran es la otra, sino es esa.

- Ahora si se equilibran (+) (+) (+) (-) ↔ (+) ( ) ( ) ( ) entonces está en las que quedaban (-) (-) (-), tomamos dos si se equilibran es la otra sino es la que baja.

705. Resulta curioso como esta pregunta se ha polemizado tanto, he aquí nuestra respuesta: Para todos es bien conocido que hace más de 60 millones de años existieron Dinosaurios, algunos eran ovíparos y no había gallinas, luego el huevo surgió primero. Habría que entrar a analizar cuál surgió primero, el huevo o el dinosaurio, pero esa es otra historia y no es la pregunta que se hace. Si la interrogante fuera ¿cuál surgió primero la gallina o el huevo de gallina?, la respuesta será la gallina porque debe estar ella primero para que pueda existir el primer "huevo de gallina" como su nombre lo indica ¿cómo apareció la gallina? La evolución, la gracia divina o de otra forma quizás, todavía los grandes filósofos no se han puesto de acuerdo, pero está claro que debía existir al menos una gallina que pusiera ese huevo para que surgiera el "huevo de gallina"; si no fuera huevo de otra cosa. Sin embargo, esa tampoco es la pregunta. Entonces. ¿Cuál surgió primero, el huevo o la gallina? *El huevo*.

706. 9 minutos. Como 9 hombres fuman 9 cigarrillos en 9 minutos, está claro que esto equivale a decir que *n* hombres fuman *n* cigarrillos en 9 minutos y por tanto 6 hombres se fuman 6 cigarrillos en 9 minutos.

707. La condición gallina y media pone huevo y medio en día y medio equivale a decir que *n* gallinas ponen *n* huevos en día y medio, por tanto 7 gallinas ponen 7 huevos en día y medio. Para llegar a los 6 días es necesario multiplicar el tiempo ($1\frac{1}{2}$ días) por 4, al igual que se hace con los huevos, de forma que 7 gallinas ponen 28 ($7 \cdot 4$) huevos en 6($1\frac{1}{2} \cdot 4$) días.

708. Este problema tiene dos soluciones, que consiste en pasar vino de una vasija a otra hasta tener la misma cantidad en dos vasijas. Le mostramos la siguiente tabla para dar las soluciones: (los valores que aparecen entre paréntesis es otra vía de solución).

	Vasija grande	Vasija de 5 L	Vasija de 3 L
Al inicio	8 (8)	0 (0)	0 (0)
Después del 1er trasvase	5 (3)	0 (5)	3 (0)
Después del 2do trasvase	5 (3)	3 (2)	0 (3)
Después del 3er trasvase	2 (6)	3 (2)	3 (0)
Después del 4to trasvase	2 (6)	5 (0)	1 (2)
Después del 5to trasvase	7 (1)	0 (5)	1 (2)
Después del 6to trasvase	7 (1)	1 (4)	0 (3)
Después del 7mo trasvase	4 (4)	1(4)	3 (0)
Después del 8vo trasvase	4	4	0

709. Para resolver este problema debemos proceder como en el ejercicio anterior, por lo que presentamos la solución en la siguiente tabla:

	Solución I			Solución II		
	Vasija 5 L	Vasija 3 L	Vasija 7 L	Vasija 5L	Vasija 3 L	Vasija 7 L
Al inicio	4	0	6	4	0	6
Después del 1ro	1	3	6	4	3	3
Después del 2do	1	2	7	6	1	3

Después del 3ro	6	2	2	2	1	7
Después del 4to	5	3	2	2	3	5
Después del 5to	5	0	5	5	0	5

710. El sabio obró con audacia, pues temporalmente unió, su caballo al rebaño lo que resulta en total de 18 caballos, por tanto puedo dividir este número conforme al testamento: el hermano mayor recibió $18\cdot \frac{1}{2}=9$ caballos, el mediano $18\cdot \frac{1}{3}=6$ caballos, y el menor $18\cdot \frac{1}{9}=2$ caballos, en total son 9 + 6 + 2 =17 caballos, el sabio tomó nuevamente su caballo, sin problema. El secreto esta en que las partes en que se dividen de acuerdo al testamento es $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{9+6+2}{18}=\frac{17}{18}$, es decir que esa suma no es uno.

711. Si uno de los hombres compró, digamos *x* objetos, entonces conforme a las condiciones del problema pagó por ellos $x\cdot x=x^2$ pesos. Si su mujer compró *y* objetos, entonces pago por ellos $y\cdot y=y^2$ pesos, de donde tenemos que $x^2-y^2=48$, o bien, $(x+y)(x-y)=48$, los valores de *x* e *y*, de acuerdo a las condiciones dadas son números enteros y positivos, y esto es posible solo en el caso cuando *x - y* y *x + y* son números pares, siendo *x + y* > *x - y*. Descomponiendo 48 en factores, tenemos que: $48=48\cdot 1=24\cdot 2=16\cdot 3=12\cdot 4=8\cdot 6$, y podemos ver que sólo tres posibilidades satisfacen las condiciones anteriores que son $48=24\cdot 2=12\cdot 4=8\cdot 6$ y de aquí:

$$\begin{array}{l} x_1+y_1=24 \\ \underline{x_1-y_1=2} \\ 2x_1=26 \\ x_1=13 \\ y_1=11 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_2+y_2=12 \\ \underline{x_2-y_2=4} \\ 2x_2=16 \\ x_2=8 \\ y_2=4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_3+y_3=8 \\ \underline{x_3-y_3=6} \\ 2x_3=14 \\ x_3=7 \\ y_3=1 \end{array}$$

Buscando aquellos valores de *x* e *y*, cuya diferencia el igual a 9, encontramos que $13-4=9$, luego Juan compró 13 objetos y Elena compró 4. De igual forma 8 - 1 = 7, y Pedro compró 8 objetos y María 1 entonces se puede formar las parejas Juan (13) y (la mujer que falta) Ana (11); Pedro (8) y Elena (4); y la otra (el hombre que falta) Alexis (7) y María (1).

712. Estos tipos de ejercicios son muy entretenidos y puede ser un agradable pasatiempo en un viaje largo, si de la misma forma fuera a obtener 100 con las cifras del número de su boletín. Ahora, si viajan en grupo se puede apostar sobre quien llega primero. Todo depende de acomodar convenientemente con las operaciones para lograrlo. En este caso tenemos que: $100=5\cdot(-2+4)\cdot(1+2+7)$.

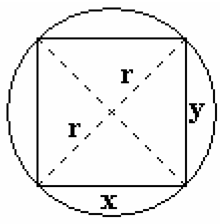
713. Para salir airoso hay que procurar pronunciar primero el número 89. Está claro que el que pronuncie este número gana pues, independientemente de la cifra que añada su competidor (10 o menos), inmediatamente puede encontrar la cifra correspondiente, cuya adición a la suma obtenida por su competidor da como resultado 100 y con ello la victoria. Pero, para conseguir con seguridad pronunciar primero el 89 y después el 100, es preciso tener en cuenta las siguientes reglas sencillas: Si comenzamos a sustraer desde 100, de once en once hasta que sea posible, obtendremos una serie compuesta por los siguientes números: 89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1; y si la escribimos en orden ascendente será: 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100; es fácil recordar estos números, pues se obtienen sumando 11 a cada número anterior a partir del 1.

Ahora queda claro que si usted pronuncia 1, independientemente de la cifra (conforme a la condición, no superior a 10) que pronuncie su competidor nunca le impedirá pronunciar a continuación 12, del mismo modo siempre podrá pronunciar 23, luego 34, 45, 56, 67, 78 y 89. Después que pronuncie 89, sea cual sea el número (no superior a 10) que añada su competidor, usted expresará 100 y ganará. De lo dicho anteriormente queda claro que si ambos competidores conocen el secreto ganará siempre aquél que pronuncie primero el 1, o sea, el que comience el juego.

714. Por lo visto, aquí el problema radica en saber la hora exacta cuando Pedro regresó a su casa. El debía razonar de la siguiente forma: Doy cuerda a mi reloj y al irme miro qué hora marca, digamos, la hora *a*. Al llegar donde mi amigo, inmediatamente le pregunto que hora es; supongamos que su reloj marca la hora *b*; antes de irme otra vez miro que hora marca su reloj, digamos que, en dicho, momento marca la hora *c*. Al llegar a casa inmediatamente observo mi reloj, marca la hora *d*. Por estos datos le será más fácil determinar la hora exacta. La diferencia $d - a$, indica el tiempo de mi ausencia en casa, la diferencia $c - b$, el tiempo que estuve con mi amigo. La diferencia $(d - a)-(c - b)$ (resultado de restar el segundo tiempo del primero), me dará el tiempo que empleé en el camino. La mitad de este, $\frac{b+d-a-c}{2}$, fue empleado en el camino de regreso. Añadiendo esta mitad a c, tendré $\frac{b+c+d-a}{2}$; esta será la hora exacta que regresé a casa, y con ella puede poner su reloj exactamente en hora.

715. No es difícil comprender que el abuelo dio menos mandarinas al tercer nieto que a los dos primeros, puesto que este, para tener la misma cantidad de mandarinas que sus hermanos, deberá recoger tantas mandarinas cuantas recibió del abuelo. Para que la solución resulte más simple diremos que el abuelo dio al tercer nieto un puñado de mandarinas. Cabe preguntarse entonces ¿cuánto puñados dio al cuarto nieto?
El tercer nieto trajo a casa dos puñados, ya que él mismo encontró tantas mandarinas cuantas le dio el abuelo. El cuarto nieto trajo a casa exactamente la misma cantidad de mandarinas que el tercero, o sea, también dos puñados, pero perdió la mitad de sus mandarinas por el camino, es decir, que el abuelo le dio cuatro puñados.
El primer nieto trajo a casa dos puñados, pero de ellos dos mandarinas encontró él mismo, o sea, el abuelo le dio dos puñados menos dos mandarinas. El segundo nieto trajo a casa dos puñados, pero por el camino perdió dos mandarinas, o sea, el abuelo le dio dos montoncitos más dos mandarinas, por lo tanto el abuelo ha repartido entre sus nietos un puñado, más cuatro puñados, más dos puñados sin dos mandarinas, más dos puñados con dos mandarinas más, en total 9 puñados enteros (en uno faltaban dos mandarinas pero en otro había dos mandarinas más). En nueve puñados iguales había 45 mandarinas, entonces, en cada puñado se tenía 45 : 9 = 5 mandarinas.
El tercer nieto recibió del abuelo un puñado, o sea, cinco mandarinas, el cuarto nieto cuatro, es decir, $5 \cdot 4 = 20$ mandarinas; el primero, 2 sin dos mandarinas, o sea, $5 \cdot 2 - 2 = 10 - 2 = 8$ mandarinas; el segundo dos puñados con dos mandarinas demás, o sea, $5 \cdot 2 + 2 = 10 + 2 = 12$ mandarinas.

716. De acuerdo al planteamiento para que la viga tenga mayor volumen el área de la base debe ser la máxima. Los lados de la sección rectangular son *x* e *y*, y su diagonal tiene que ser el diámetro del círculo, y para que esa área sea máxima se tiene que cumplir que $x \cdot y$ sea máxima y esto ocurre solo cuando *x* = *y*, de ahí que la sección de la viga tenga que ser cuadrada.



717. La forma de la parcela rectangular se determina por la relación entre sus lados *a* y *b* y su área será $A = a \cdot b$ y la longitud de la cerca será $P = 2(a + b)$. El perímetro será el menor si $a + b$ tiene el menor valor. Si el producto $a \cdot b$ es constante, la suma $a + b$ es la menor si $a = b$, por lo tanto el rectángulo buscado es un cuadrado.

718. Si *a* y *b* son los lados de una parcela rectangular la longitud de su cerca será $P = 2(a + b)$. y su área será $A = a \cdot b$. Este producto es el mayor cuando lo es también el producto $2a \cdot 2b = 4ab$, este alcanza su valor máximo, siendo $2a + 2b$ constante, cuando $2a = 2b$, es decir, cuando $a = b$, de ahí que la parcela tiene que tener forma cuadrada.
<u>Nota</u>: De este ejercicio y el anterior podemos concluir una nueva propiedad del cuadrado: el cuadrado es, entre los rectángulos, el que con un área dada tiene menor perímetro y con un perímetro dado tiene mayor área.

719. En la solución de este problema solo se tiene que tener en cuenta el algoritmo del cambio de base:

$1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 9 + 6 + 1 = 16$ por lo que se cumple que $121_3 = 16_{10}$. Luego el número 121 escrito en base 3 es igual al número 16 escrito en base 10.

720. Aunque esta pregunta le parezca insólita, esta muy lejos de carecer de sentido, y puede ser resuelta mediante ecuaciones. Si has pensado correctamente, habrás comprendido que los datos que se dan no pertenecen al sistema decimal, pues en caso contrario, la pregunta ¿cuál es la equivalencia de 84? Sería absurdo.
Supongamos que la base del sistema desconocido de numeración es *x*. El número 84 equivale entonces a 8 unidades de segundo orden y cuatro unidades del primero, es decir: $84 = 8 \cdot x^1 + 4 \cdot x^0 = 8x + 4$.
El número 54 equivale a $5x + 4$ y tenemos la ecuación: $8 \cdot 8 = 5x + 4$,es decir; en el sistema de numeración decimal sería:
$64 = 5x + 4 \Rightarrow 5x = 60 \Rightarrow x = 12$
Este número está expresado en el sistema de base de 12, y 84 =8.12 + 4 =100. Por lo tanto, si 8.8 = 54, 84 será igual a 100.
De igual forma se puede resolver este problema:
¿Cuál es el equivalente de 100, si $5 \cdot 6 = 33$?
$100 = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$ y $33 = 3x + 3$ y como $5 \cdot 6 = 3x + 3$
$30 = 3x + 3 \Rightarrow 27 = 3x \Rightarrow x = 9$
Entonces $100 = 1 \cdot 9^2 + 0 \cdot 9 + 0 = 81$, por lo tanto 100 es igual a 81 en base 9.

De cuántas formas...

721. $P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$ formas en que puede elegir el hotel.
722. Serán en total $3 \cdot 4 = 12$ combinaciones las que pueden hacerse.
723. Existen 12 formas de cambiar 1 peso en monedas de 5, 20 y 40 centavos.

	Moneda de 40	Moneda de 20	Moneda de 5
1	2	1	-
2	2	-	4
3	1	3	-
4	1	2	4
5	1	1	8
6	1	-	12
7	-	5	-
8	-	4	4
9	-	3	8
10	-	2	12
11	-	1	16
12	-	-	20

724. Estamos en presencia de una permutación con repetición, pues tenemos 2 caballos, 2 torres y 2 alfiles, luego: $PR_{8,2,2,2} = \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{7! \cdot 8}{8} = 7! = 5040$ formas de colocar las piezas blancas del ajedrez en la primera fila.
725. a) Como tenemos que comprar 12 estampillas y se tienen 10 tipos, tenemos una combinación con repetición, luego existen $CR_{10,12} = C_{10+12-1,12} = \frac{(10+12-1)!}{12! \cdot (10-1)!} = \frac{21!}{12! \cdot 9!} = 293930$ formas diferentes de comprar las estampillas.
b) De igual forma es una combinación con repetición, luego tenemos: $CR_{10,8} = \frac{17!}{8! \cdot 9!} = 24310$ formas.
c) Como no se pueden repetir tenemos una combinación sin repetición, luego: son $C_{10,8} = \frac{10!}{8! \cdot (10-8)!} = 45$ formas en que se pueden elegir las estampillas.

726. Como en el grupo de 6 personas a escoger debemos elegir no menos de dos mujeres, tenemos que escoger 2, 3 ó 4 mujeres; para escoger 2 mujeres se puede hacer de $C_{4,2}=\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$ formas y después hay que escoger 4 hombres, lo cual puede efectuarse de $C_{7,4}=\frac{7!}{4!\cdot 3!}=35$ formas, en virtud de la regla del producto obtenemos $C_{4,2}\cdot C_{7,4}=6\cdot 35=210$ de igual forma si se eligen 3 mujeres y 3 hombres serán: $C_{4,3}\cdot C_{7,3}=4\cdot 35=140$ y para elegir 4 mujeres y 2 hombres será $C_{4,4}\cdot C_{7,2}=1\cdot 21=21$ y en total serán $210+140+21=371$ modos.

727. Para que un número de cuatro cifras sea divisible por cuatro es suficiente que las dos últimas cifras sean divisibles por 4, de aquí tenemos solo 5 posibilidades, que son: 12, 24, 32, 44, y 52, y como las dos primeras cifras pueden ser arbitrariamente cualquiera de las posibles tenemos que estas son: $VR_{5,2}=5^2=25$ posibilidades y en total se pueden obtener para cada una de estas 25 formas los 5 de los divisores de 4, luego en total $25\cdot 5=125$ números diferentes que cumplen la condición.

728. Cada uno de los *n* pasajeros puede escoger cualquiera de las *m* paradas luego tenemos una variación con repetición: $VR_{m,n}=m^n$ modos de distribución.

729. Si *a* y *b* se hallan juntos tenemos *n-1* elementos, que se pueden permutar en $P_{n-1}=(n-1)!$ pero como *a* y *b* se pueden permutar tenemos $2P_{n-1}=2(n-1)!$ permutaciones en que *a* y *b* están juntos, por lo que no estaban juntos en: $P_n-2P_{n-1}=n!-2(n-1)!$ permutaciones.

730. Tres jueces pueden escoger al vencedor de $VR_{10,3}=10^3=1000$ maneras, pueden nombrar a tres candidatos distintos en $VR_{10,3}=\frac{10!}{(10-3)!}=\frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!}=720$ casos, por esto la coincidencia de dos jueces, por lo menos, tendrá lugar en $VR_{10,3}-V_{10,3}=1000-720=280$ casos y el porcentaje será:

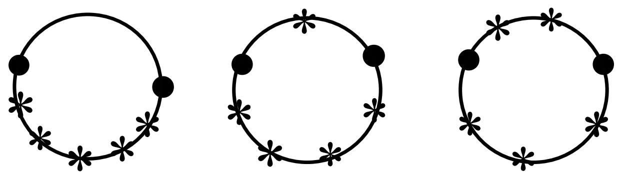
$$\left.\begin{array}{l} 280\to x \\ \underline{1000\to 100\%} \end{array}\right\}\Rightarrow x=\frac{280\cdot 100\%}{1000}=28\%$$

R/ En el 28% de los casos se habrá determinado un ganador.

731. Como cada estudiante puede obtener tres tipos de calificaciones para estar aprobados, de las cuatro posibles tenemos: $VR_{3,4}=3^4=81$ formas de rendir los exámenes.

732. En las permutaciones cíclicas se tiene que: $\frac{P_n}{2\cdot n}=\frac{P_{n-1}}{2}$ por lo tanto para formar los collares se tiene que: $\frac{P_7}{2\cdot 7}=\frac{P_6}{2}=\frac{6!}{2}=\frac{720}{2}=360$ tipos de collares.

733. Los tipos de collares se diferencian entre sí en el número de cuentas pequeñas (*) contenidas entre las dos grandes (•). Por eso, tendremos tres tipos de collares, como muestra la figura.



734. Como debemos buscar las posibles variaciones en que pueden bailar los 7 varones con las 10 chicas, tenemos $V_{10,7}=\frac{10!}{(10-7)!}=\frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{3!}=604800$ formas.

735. El oficial puede elegirse de $C_{3,1}=\dfrac{3!}{1!(3-1)!}=\dfrac{2!\cdot 3}{2!}=3$ maneras, los dos sargentos de $C_{6,2}=\dfrac{6!}{2!(6-2)!}=\dfrac{4!\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 4!}=15$ formas y los soldados rasos en: $C_{60,20}=\dfrac{60!}{20!(60-20)!}$. En total se obtienen, en virtud de la regla del producto $C_{3,1}\cdot C_{6,2}\cdot C_{60,20}$ formas de elección.

736. Cuatro chicas pueden ser elegidas de $C_{12,4}=\dfrac{12!}{4!\cdot(12-4)!}=495$ maneras. Después de esto y teniendo en cuenta que aquí sí importa el orden, elegimos de $V_{15,4}=\dfrac{15!}{(15-4)!}=32760$ modos a las muchachas. En total se obtienen $C_{14,4}\cdot V_{15,4}=17417400$ formas.

737. Cada gallina puede figurar o no entre las elegidas. Por esto hay $VR_{2,3}=2^3=8$ formas de elección de gallinas, como nos dicen que debe ser escogida, por lo menos, una gallina; obtenemos $VR_{2,3}-1=2^3-1=7$ formas de elección de estas (el –1, por ser la vez que no hay gallinas) análogamente hay $VR_{2,4}-1=2^4-1=15$ de elecciones de patos y $VR_{2,2}-1=2^2-1=3$ de elección de los gansos. En total hay $7\cdot 15\cdot 3=315$ modos.

738. Este número es igual a $PR_{m+n+p;m;n;p}=\dfrac{(m+n+p)!}{m!\cdot n!\cdot p!}$

739. Los libros encuadernados en negro se pueden permutar de $P_m=m!$ maneras y los que están en rojo de $P_n=n!$. En total hay según las reglas del producto $m!\cdot n!$ formas. Si los libros encuadernados en negro están juntos, hay que elegir además para estos el lugar entre los encuadernados en rojo, cosa que puede efectuarse de $n+1$ modos. En total obtenemos $m!\cdot n!\cdot(n+1)=m!(n+1)!$ formas.

740. Agreguemos a los 20 libros cuatro objetos de separación iguales y consideremos todas las permutaciones de los objetos obtenidos. El número de estos es igual a $PR_{20,4}=\dfrac{(20+4)!}{4!}=\dfrac{24!}{4!}$. A cada permutación le corresponde su forma de distribución de los libros.

741. Procediendo de forma análoga al problema anterior, se obtiene que el número de maneras es igual a $PR_{5,3}=\dfrac{(5+3)!}{3!}=\dfrac{8!}{3!}=6720$.

742. Como se toma en consideración solo el número de votos, que obtuvo cada moción, hay que distribuir 30 objetos iguales en 5 cajones, para esto, agreguemos 4 objetos de separación iguales, y tenemos todas las permutaciones de los objetos obtenidos. El número de estos es igual a $PR_{30,4}=\dfrac{(30+4)!}{30!\cdot 4!}=\dfrac{34!}{30!\cdot 4!}=46376$. A cada permutación le corresponde su distribución de votos.

743. 12 libros se pueden encuadernar en 3 colores de $VR_{3,12}=3^{12}$ modos. De ellos en $3\cdot VR_{2,12}=3\cdot 2^{12}$ casos los libros estarán encuadernados en no más de 2 colores y en 3 casos en un solo color. Según la fórmula de inclusión y exclusión, en $3^{12}-3\cdot 2^{12}+3=519156$ casos los libros estarán encuadernados en cada uno de los tres colores.

744. Agreguemos a las 28 letras 5 "tabiques" (espacios de separación) iguales y consideremos todas las permutaciones posibles de los objetos obtenidos, en los que no haya ningún tabique al principio, o al final, o dos juntos. Las letras se permutan de $P_{28}=28!$ maneras y para los tabiques obtenemos 27 lugares, pudiéndolos colocar de $C_{27,5}=\dfrac{27!}{5!\cdot(27-5)!}=\dfrac{27!}{5!\cdot 22!}$ teniendo en cuenta que el orden de las palabras no tiene importancia se obtienen $\dfrac{28!\cdot C_{27,5}}{6!}$ maneras de formar las palabras.

745. 12 personas se pueden escoger de entre 17 de $C_{17,12}$ modos. En $C_{15,10}$ de los casos, entre los elegidos figuran dos personas dadas, por eso, quedan $C_{17,12} - C_{15,10}$ elecciones admisibles.

746. Las piedras se pueden permutar de $PR_{5,6,7} = \dfrac{(5+6+7)!}{5!\cdot 6!\cdot 7!}$ en las permutaciones cíclicas y en las simétricas, el brazalete permanece invariable, por eso, obtenemos $\dfrac{PR_{5,6,7}}{36} = \dfrac{18!}{36\cdot 5!\cdot 6!\cdot 7!}$ modos.

747. Si todas las piedras escogidas son de un mismo tipo, tenemos 3 modos, si se escogen 2 tipos de piedras tenemos $2\cdot C_{3,1} = 2\cdot\dfrac{3!}{1!\cdot 2!} = 2\cdot 3 = 6$ modos y si las 3 piedras son diferentes, de un modo. En total hay $3+6+1=10$ formas.

748. Las tazas se pueden distribuir de $V_{4,3} = \dfrac{4!}{(4-3)!} = 2\cdot 3\cdot 4 = 24$ formas, los platillos de $V_{5,3} = \dfrac{5!}{(5-3)!} = 60$ y las cucharitas de té, de $V_{6,3} = \dfrac{6!}{(6-3)!} = 120$ en total se obtienen, en virtud de la regla del producto $V_{4,3}\cdot V_{5,3}\cdot V_{6,3} = 24\cdot 60\cdot 120 = 172800$ maneras.

749. Si el marido invita a *k* mujeres, el número de hombres es igual a $6-k$. Entonces la esposa invitará a $6-k$ mujeres y *k* hombres. Según las reglas de la suma y del producto, esta elección se puede efectuar de:

$$\sum_{k=0}^{5}\left(C_{5,k}\right)^2\cdot\left(C_{7,6-k}\right)^2 = 267148 \text{ modos.}$$

750. En el costado izquierdo pueden estar sentados 0, 1, 2, 3 ó 4 personas de aquellas a las que les es indiferente la elección del costado. Si entre ellas han sido elegidas *k* personas, hay que escoger además $(4-k)$ entre los 10 que prefieren el costado izquierdo. Después de esto quedarán: $12+(9-k)$ candidatos, entre los cuales elegimos 4 remeros para el lado derecho. En total, tendremos $(C_{9,k})\cdot(C_{10,4-k})\cdot(C_{21-k,4})$ formas de elección. Sumándolas con respecto a *k*, obtenemos la respuesta: $\sum_{k=0}^{4}(C_{9,k})\cdot(C_{10,4-k})\cdot(C_{21-k,4}) = \dfrac{9!\cdot 10!}{4!}\cdot\sum_{k=0}^{4}\dfrac{(21-k)!}{k!\cdot(9-k)!\cdot(6+k)!\cdot(17-k)!}$.

751. El número 9 se puede descomponer en tres sumandos distintos de tres maneras distintas: $1+2+6=1+3+5=2+3+4=9$. La suma menor que 9 tendrá lugar en 4 casos: $1+2+3=6$, $1+2+4=7$, $1+2+5=8$, $1+3+4=8$. Como tres fichas pueden ser extraídas de $C_{10,3} = \dfrac{10!}{3!\cdot(10-3)!} = 120$ formas, en $C_{10,3} - 4 = 120 - 4 = 116$ casos la suma no será menor que 9.

752. Escojamos primeramente una carta de cada palo. Esto se puede efectuar de $VR_{13,4} = 13^4$ modos. Después de esto, escojamos dos cartas más. Si son de distinto palo, esto se puede hacer de $(C_{4,2})\cdot(VR_{12,2}) = \dfrac{4!}{2\cdot(4-2)!}\cdot 144 = 864$ maneras. Combinándolas con las diferentes formas de escoger las primeras 4 cartas y teniendo en cuenta la posibilidad de permutar el orden de elección de dos cartas de un mismo palo, se obtienen $\dfrac{1}{4}\cdot 864\cdot 13^4 = 216\cdot 13^4$ modos. Si las dos nuevas cartas son del mismo palo, obtenemos: $4\cdot C_{12,2} = 4\cdot\dfrac{12!}{2\cdot 10!} = 264$ maneras de elección. Por las mismas consideraciones, éstos conducen a $88\cdot 13^4$ modos de elección de todas las cartas. En total obtenemos: $304\cdot 13^4$ formas.

753. En el primer día los participantes se pueden escoger de $C_{10,6} = \dfrac{10!}{6!\cdot 4!} = 210$ formas, en el segundo de $C_{10,6} - 1 = 209$, en el tercero de $C_{10,6} - 2 = 208$. En total habrá

$210\cdot 209\cdot 208 = 9129120$ maneras.

754. Como $C_{6,3} = \dfrac{6!}{3!\cdot(6-3)!} = 20$, cada forma de elección del grupo será utilizada exactamente una vez. El número de permutaciones de estas formas es igual a 20!.

755. Cada muchacho puede elegir entre 5 lugares de trabajo y cada muchacha de 4 lugares. En total se obtiene $(VR_{5,2})\cdot(VR_{4,2}) = 5^3\cdot 4^2 = 125\cdot 16 = 2000$ formas de elección.

756. En el primer lugar se pueden escribir cualquiera de las 33 letras y en cada uno de los siguientes, cualquiera de 32 (se excluye el precedente). En total tendremos:
$33\cdot VR_{32,4} = 33\cdot 32^4 = 34503008$ palabras.

757. Escojamos primeramente los premiados y distribuyamos después entre ellos los libros. En virtud de la regla del producto, se obtienen $(C_{20,6})\cdot(PR_{3,2,1})$ maneras. En el segundo caso elegimos primero quién obtuvo el primer libro, luego quién obtuvo el segundo libro y, al fin, a quién le tocó el tercero. En total obtenemos: $(C_{20,3})\cdot(C_{20,2})\cdot(C_{20,1})$ formas de distribución.

758. De acuerdo a la situación del problema, los lugares ocupados por las mujeres y los hombres se alternan. Por esto tenemos $2\cdot(P_7)^2 = 2\cdot(7!)^2$ maneras.

759. Se puede escoger un caballo de cada par AA´, BB´, CC´ de $VR_{2,3} = 2^3 = 8$ formas, los otros tres caballos de los restantes 10 en $C_{10,3} = \dfrac{10!}{3!\cdot(10-3)!} = 120$ formas y para elegir el orden de enganchar los caballos en $P_6 = 6! = 720$ maneras. En total habrá $VR_{2,3}\cdot C_{10,3}\cdot P_6 = 8\cdot 120\cdot 720 = 691200$ modos.

760. Las consonantes se pueden elegir de $C_{9,4}$ formas y las vocales de $C_{7,3}$ las siete letras elegidas pueden ser permutadas de $P_7 = 7!$ en total obtenemos $C_{9,4}\cdot C_{7,3}\cdot P_7$ modos. Si no pueden haber dos vocales juntas, el orden de las letras es el siguiente CVCVCVC (Consonante – Vocal); aquí tenemos solo $P_3 = 3!$ para las vocales (V) y $P_4 = 4!$ para las consonantes (C), o sea, $P_3\cdot P_4 = 3!\cdot 4!$ permutaciones y en total $C_{9,4}\cdot C_{7,3}\cdot P_3\cdot P_4$ palabras.

761. En virtud de la fórmula de inclusiones y exclusiones, el número de empleados es igual a $6+6+7-4-3-2+1 = 11$, solo inglés conocen $6-4-2+1 = 1$ y solo francés $7-3-2+1 = 3$.

762. Según la fórmula de inclusiones y exclusiones, tenemos $92-47-38-42+28+31+26-25 = 25$ personas llevarán empanadas.

763. Los hombres pueden ser divididos en pares de $\dfrac{10!}{(2!)^5\cdot 5!}$ maneras (teniendo en cuenta las permutaciones dentro de los pares y las de los propios pares), las mujeres se dividen de $\dfrac{10!}{(2!)^5}$ formas (aquí ya tiene importancia el orden de los pares). En total existen de $\dfrac{(10!)^2}{(2!)^{10}\cdot 5!}$ modos.

764. Escojamos primeramente un hombre y una mujer, los que quedarán en el mismo bote que el par escogido antes (9^2 formas). Después, dividamos las restantes en 4 grupos de $\dfrac{(8!)^2}{2^8\cdot 4!}$ maneras. En total habrá $\dfrac{(9!)^2}{2^8\cdot 4!}$ modos.

765. Como los números no pueden comenzar por el cero, tendremos: $VR_{7,4} - VR_{7,3} = 7^4 - 7^3 = 2058$ números.

766. Si el número representado por las tres primeras cifras es igual a *x*, el que representa las últimas tres puede adquirir los valores 0, 1, 2, · · ·, 999 – *x*, en total 1000-*x* valores. Como *x* varía de 100 a 999, debemos hallar la suma de los números naturales del 1 al 900. esto es igual a

405450.

767. Las fichas blancas se pueden disponer de $C_{32,12}$ maneras. Después de la elección de 12 casillas para las fichas blancas, quedarán 20 para las negras, sobre las cuales se les pueden ubicar de $C_{20,12}$ formas. En total hay $C_{32,12} \cdot C_{20,12}$ modos.

768. a) Dividamos todas las permutaciones de las letras de la palabra "olivar" en clases, de forma que las permutaciones a una misma clase se diferencian entre sí, solo en el orden de las vocales. El número de clases es igual a $\frac{P_6}{P_3} = 120$ solamente una permutación de cada clase satisface la condición planteada. Por esto, su número es también igual a 120.

b) En las permutaciones en que las 4 "*a*" van juntas, se les puede unir y considerar como una sola letra. Por esto el número de estas permutaciones es igual a 5!. Quedan $P_{4,1,1,1,1} - 5! = 1560$ permutaciones.

c) Si la "*g*" va inmediatamente después de una "*o*" estas letras se pueden unir. Por esto el número de permutaciones buscadas es igual a $P_{2,1,1,1,1} = 360.$

d) Escribamos primeramente todas las letras de la palabra "cloroformo" distintas de la "*o*", lo que puede hacerse de $P_{2,1,1,1,1} = 360.$ maneras. Después de esto, escogemos 4 de los 7 lugares, en los que se pueden colocar las letras "*o*". En total, obtenemos: $P_{2,1,1,1,1} \cdot C_{7,4}$ formas.

e) Tanto las vocales como las consonantes se pueden permutar entre sí de $P_{2,1,1} = 12$ modos. Si ya han sido dispuestas las consonantes, para las vocales quedarán 5 lugares. Por esto, los lugares para ellas pueden ser elegidos de $C_{5,4} = 5$ maneras. En total tendremos $5 \cdot 12^2 = 720$ modos.

f) Escribamos las vocales en el orden dado. Entonces, para la letra "*c*" tendrá 5 lugares. Después de escribirla, habrá 6 lugares para la "*r*" y por último, 7 para la "*l*".En total $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$ modos.

g) Fijemos primeramente la sucesión de las vocales (hay 2 formas), y después ubiquemos entre ellas a dos consonantes, hay $V_{4,2} = 12$ maneras. La primera de las consonantes que quedan se puede colocar antes o después de ambas vocales (dos formas) y para la segunda ya tendremos tres lugares. En total tendremos $2 \cdot 12 \cdot 2 \cdot 3 = 114$ modos.

h) Escojamos tres letras de las 5 consonantes y coloquémoslas en los lugares indicados (existen $V_{5,3}$ formas), las 6 letras restantes se disponen arbitrariamente en los 6 lugares que quedan (hay 6! Formas). En total habrá $6! \cdot V_{5,3} = 43200$ maneras.

i) Parecido al inciso b) $P_{3,1,1,1} - 4! = 96$ modos.

j) Como el orden tanto de las vocales como de las consonantes está determinado, hay que escoger solo 3 lugares entre 7 para las vocales. Esto puede hacerse de $C_{7,3}$ maneras.

k) Para la palabra espirales, la primera y última letras deben ser consonantes. Esto se puede permutar de $P_{2,1,1,1}$ formas y las vocales de $P_{2,1,1}$ maneras. En total tendremos $P_{2,1,1,1} \cdot P_{2,1,1} = 720$ modos.

l) Las letras de la palabra "tic-tac" se pueden permutar de $\frac{P_6}{P_2 \cdot P_2} = 180$ modos. En 60 de estas permutaciones estarán juntas las dos "*t*" (no tendremos en cuenta el guión); en 60 las dos "*c*" y en 24, ambas letras. Según la fórmula de inclusiones y exclusiones, obtenemos $180 - 60 - 60 + 24 = 84$ permutaciones admisibles.

769. Las dos consonantes en $C_{5,2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$ y la vocal en $C_{4,1} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4$ y en virtud de la regla del producto en $C_{5,2} \cdot C_{4,1} = 10 \cdot 4 = 40$ maneras.

770. Los números diferentes de cuatro cifras que se pueden formar con los dos unos, dos dos y dos tres del número 123123 son $3 \cdot PR_{2,1,1} + 3 \cdot PR_{2,2} = 3 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!} + 3 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 36 + 18 = 54$.

771. Según la fórmula de inclusiones y exclusiones, obtenemos que todas las cifras 1, 2, 3, 4 están

contenidas en $10^6 - 4\cdot 9^6 + 6\cdot 8^6 - 4\cdot 7^6 + 6^6 = 23160$ números. Solo por las cifras 1, 2, 3, 4 están formadas $4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 + 4^6 = \dfrac{4^7 - 4}{3} = 5460$ números.

772. Cada cifra aparece en cada columna $\dfrac{P_4}{4} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{4} = 6$ veces. Por esto, sumando las cifras de la primera columna, obtenemos $6\cdot(1+2+3+4) = 6\cdot 10 = 60$, sumando los de la segunda 600, y así sucesivamente, en total se obtienen $60 + 600 + 6000 + 60000 = 66660.$

773. Como mediante las cifras 8 y 9. se pueden escribir 2^k números de *k* cifras, la cantidad total de números buscados es igual a $\sum_{k=1}^{6} 2^k = 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^6 = 2 + 4 + \cdots + 64 = 126$.

774. Cada cifra se repite en cada columna $4^2 = 16$ veces. Por esto, la suma de las cifras de la primera columna es igual a $16(1+2+3+4) = 16\cdot 10 = 160$, la de las cifras de la segunda a 1600, la de la tercera 16000 y la suma es igual a $160 + 1600 + 16000 + 160000 = 17760$.

775. Cada cifra aparece en cada columna $P_4 = 4! = 2\cdot 3\cdot 4 = 24$. Por eso sumando las cifras de la primer columna tenemos $24(1+2+3+4+5) = 24\cdot 15 = 360$, sumando la segunda 3600, la tercera 36000, ···, y la suma es igual a 360+3600+36000+360000+3600000=3999960.

776. En el último lugar puede estar la cifra 3 o la 9; las restantes se pueden permutar de $P_3 = 3! = 6$ maneras. En total, obtenemos $2\cdot P_3 = 12$ números impares

777. Los lugares para las cifras impares se pueden escoger de $C_{6,3} = \dfrac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$ formas. En cada lugar puede estar una de las 5 cifras (o par o impar). En total obtenemos $20\cdot 5^6$ números, pero entre ellos $10\cdot 5^5$ comienzan por cero, por tanto nos quedan $20\cdot 5^6 - 10\cdot 5^5 = 281250$ números.

778. En el primer lugar pueden estar una de las 9 cifras (se excluye la cifra 0), en el segundo, tercero, cuarto y quinto una de las 10 cifras y en el último una de las cinco (números pares). En total obtenemos $9\cdot 10^4\cdot 5 = 450000$ números.

779. Si se excluyen los ceros, las cifras restantes darán una de las sucesiones siguientes: 3; 2, 1; 1, 2; 1, 1, 1. queda por distribuir los ceros de forma que la primera cifra sea distinta de cero. Para el 3 esto se puede hacer de una manera, para 2, 1 y 1, 2 de 9 maneras (según la cantidad de ceros que se hallen entre estas cifras) y para 1, 1, 1 de $C_{9,2}\,\dfrac{9!}{2!\cdot 7!} = 36$ modos. En total tenemos $1 + 2\cdot 9 + 36 = 55$ números.

780. En el primer lugar pueden estar cualquiera de las nueve cifras (se excluye el cero). El segundo lugar lo puede ocupar cualquiera de los 9 restantes (se incluye el cero y se excluye la cifra seleccionada anteriormente); el tercero cualquiera de las 8 restantes, en el cuarto cualquiera de las 7 restantes, y así sucesivamente. En total se obtienen 9.9! números.

781. La cantidad de números del 0 al 999 que se divide por 5 es igual a $\left[\dfrac{1000}{5}\right]$; siendo $[a]$ la parte entera de *a*. Análogamente, por 7 se dividen $\left[\dfrac{1000}{7}\right]$ números, y por 35, $\left[\dfrac{1000}{35}\right]$. En virtud de la fórmula de inclusiones y exclusiones se obtiene que: $1000 - \left[\dfrac{1000}{5}\right] - \left[\dfrac{1000}{7}\right] + \left[\dfrac{1000}{35}\right] = 1000 - 200 - 142 + 28 =$ 686 números que no se dividen ni por 5, ni por 7.

782. De forma análoga al anterior tenemos que:

$$1000 - \left[\frac{1000}{2}\right] - \left[\frac{1000}{3}\right] - \left[\frac{1000}{5}\right] - \left[\frac{1000}{7}\right] + \left[\frac{1000}{6}\right] +$$

$$\left[\frac{1000}{10}\right] + \left[\frac{1000}{14}\right] + \left[\frac{1000}{15}\right] + \left[\frac{1000}{21}\right] + \left[\frac{1000}{35}\right] -$$

$$\left[\frac{1000}{30}\right]-\left[\frac{1000}{42}\right]-\left[\frac{1000}{70}\right]-\left[\frac{1000}{105}\right]+\left[\frac{1000}{210}\right]=$$
$$1000-500-333-200-142+166+100+71+66+$$
$$47+28-33-23-14-9+4=228$$

783. La cantidad de números que se escriben sin la cifra 9 es igual a $VR_{9,3}=9^3=729$ por esto la cifra 9 está contenida en 100 - 729 = 271 números. Exactamente en $3\cdot 9=27$ números (099, 990, 909, 199, · · ·).

784. La cantidad de números de *n* cifras que no contienen dos cifras iguales seguidas es igual a 9^n si $n>1$, y a 10 si $n=1$. Por esto, la cantidad de estos números del 0 al 999999 es igual a $10+9^2+9^3+9^4+9^5+9^6=1+\sum_{n=0}^{6}9^n=597871$

785. El número de cuatro cifras puede estar formado por cuatro cifras distintas (1, 2, 3, 5) o sea $P_4=4!=24$ o por dos iguales y dos diferentes (1, 1, 2, 3; 1, 1, 2, 5; 1, 1, 3, 5; 1, 2, 3, 3; · · ·); o sea $6PR_{2,1,1}=6\cdot\frac{4!}{2!\cdot 1\cdot 1}$ = 6·12= 72; y por último, por dos pares de cifras iguales (1, 1, 3, 3, · · ·), o sea PR $PR_{2,2}=\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$. Por eso la cantidad de estos números es igual a $P_4+6PR_{2,1,1}+PR_{2,2}=24+72+6=102$.

786. En forma análoga al problema anterior, obtenemos la respuesta: $2PR_{2,1,1,1}+3PR_{3,1,1}+2PR_{2,2,1}+3PR_{4,1}=2\cdot\frac{5!}{2!\cdot 1\cdot 1\cdot 1}+3\cdot\frac{5!}{3!\cdot 1\cdot 1}+2\cdot\frac{5!}{2!\cdot 2!\cdot 1}+3\cdot\frac{5!}{4!\cdot 1}=$ $120+60+60+15=255$

787. En el número de seis cifras pueden figurar uno, dos o tres pares de cifras iguales. Un par se puede escoger de $C_{5,1}=\frac{5!}{1\cdot 4!}=5$ maneras. El número de permutaciones de 4 cifras distintas y dos iguales, es $PR_{2,1,1,1,1}=\frac{6!}{2!}=360$. Entre ellas, en $5!=120$ permutaciones, dos cifras iguales estarán juntas. Por consiguiente, en este caso obtenemos $5(360-120)=1200$ números de seis cifras. Dos pares de cifras iguales pueden ser escogidas de $C_{5,2}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10$ maneras, luego de lo cual de $C_{3,2}=3$ formas se pueden escoger dos cifras más. La cantidad total de permutaciones de estas cifras es igual a $PR_{2,2,1,1}=180$, con la particularidad de que en $2\cdot\frac{5!}{2!}=120$ de ellos hay por lo menos un par de cifras iguales seguidas, y en $4!=24$ permutaciones dos de estos pares. En virtud de la fórmula de inclusiones y exclusiones, se obtiene que esto nos da $10\cdot 3(180-120+24)=2520$ números necesarios. Análogamente se halla que tres pares de cifras iguales las tienen $C_{5,3}\cdot\left(\frac{6!}{(2!)^3}-3\cdot\frac{5!}{(2!)^2}+3\cdot\frac{4!}{2!}-3!\right)=300$ números necesarios. En total obtenemos 4020 números.

788. El número total de permutaciones de las cifras dadas es igual a $PR_{2,2,2,2}$ permutaciones. Entre ellas en $PR_{2,2,2,1}$ permutaciones, una cifra dada se halla dos veces seguidas. En $PR_{2,2,1,1}$ se repetirán seguido 2 cifras dadas, en $PR_{2,2,1,1}$ 3 cifras dadas y en $PR_{1,1,1,1}$, 4 cifras dadas. Según la fórmula de inclusiones y exclusiones, obtenemos que no habrá 2 cifras que se repiten en: $PR_{2,2,2,2}$ - 4 $PR_{2,2,2,1}$ + 6 $PR_{2,2,1,1}$ - 4 $PR_{2,1,1,1}$ + $PR_{1,1,1,1}$=864.

789. El número de permutaciones de las cifras es igual a $PR_{3,3,1,1,1,1}$. En $PR_{3,1,1,1,1,1}$ hay una cifra repetida 3 veces juntas. Según la fórmula de inclusiones y exclusiones

tenemos $\frac{10!}{(3!)^2} - 2 \cdot \frac{8!}{3!} + 6! = 88088$.

790. Si se ha escogido un número par (impar), el segundo impar (par) se puede elegir de 10 maneras. Teniendo en cuenta la posibilidad de permutar estos dos números, se obtiene $\frac{20 \cdot 10}{2} = 100$ modos de elección.

791. Para que la suma de tres números sea par, o los tres números escogidos son pares, o bien uno es par y dos son impares. Por esto, como del 1 al 30 hay 15 pares y 15 impares, obtendremos $C_{15,3} + C_{15,1} \cdot C_{15,2} = 2030$ maneras de elección.

792. En 5 puntos del camino se pueden elegir entre tres posibilidades, por lo tanto el número de formas es $VR_{3,5} = 3^5 = 243$.

793. Si se han escogido *p* monedas por valor de 5 centavos, se pueden tomar $0,1,2,3,\cdots,20-p$ de 10 centavos y en dependencia de esto las de 25 centavos. Por tanto en total hay $21-p$ formas, como *p* varía de 0 a 20, tendremos en total $1+2+3+\cdots+21 = 312$ maneras de elección.

794. La cantidad de números de cinco cifras es igual a 90000. entre ellas, cada cifra es un número par en $4 \cdot 5^4 = 2500$ casos e impar en $5^5 = 3125$. Las cifras menores que 6 no figuran en $4^5 = 1024$ casos y los menores que 3, en $3 \cdot 4^4 = 768$. Todas las cifras 1, 2, 3, 4, 5 están contenidas en $5! = 120$ números y todos los 0, 2, 4, 6, 8 en $4 \cdot 4! = 96$.

795. De la hipótesis del problema se aprecia que distintos resultados de echar los dados darán igual suma solo si se obtienen uno del otro permutando los dados. Por esto, la cantidad de sumas distintas es igual a $C_{6,2} + 6 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} + 6 = 15 + 6 = 21$.

796. Análogamente al anterior obtenemos la respuesta $C_{6,3} + 2C_{6,2} + 6 = 56$

797. Como 1000000 $= 2^6 \cdot 5^6$, cualquier desarrollo de un millón en tres factores tendrá la forma: $1000000 = \left(2^{a_1} \cdot 5^{b_1}\right)\left(2^{a_2} \cdot 5^{b_2}\right)\left(2^{a_3} \cdot 5^{b_3}\right)$ donde $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ son números enteros no negativos, tales que: $a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 = 6$ como 6 se descompone en 3 sumandos enteros no negativos de C $C_{8,2} = \frac{8!}{2 \cdot 6!} = 28$ modos, el número de desarrollar será igual a $28^2 = 784$, si se tiene en cuenta el orden de los factores.

798. Cada moneda puede quedar en uno de los dos bolsillos. Por tanto tendremos $2^9 = 512$ maneras.

799. 4 ases se pueden dividir en dos mitades de $\frac{4!}{(2!)^2} = 3$ maneras y las 32 cartas restantes de $\frac{32!}{(16!)^2 \cdot 2!}$ como estas particiones se pueden combinar entre sí de dos maneras, obtenemos $\frac{3 \cdot 32!}{(16!)^2}$ formas de partición.

800. El número de maneras es igual a $\frac{9!}{2^4 \cdot 4!} = 945$.

801. Tres personas pueden repartir 6 manzanas de $C_{8,2}$ maneras, cada una de las frutas restantes puede tocarle a cualquiera de los tres y podemos repartirlas de 3^6 formas. En total se obtienen $3^6 \cdot C_{8,2} = 20412$ modos de reparto.

802. Como $9 = 6+3+0 = 6+2+1 = 5+4+0 = 5+2+2 = 4+3+2 = 3+3+3$ obtenemos

$$6\begin{bmatrix} C_{9,3} + C_{9,4} + C_{9,1} \cdot C_{8,2} + C_{9,2}.C_{8,3} + C_{9,2} \cdot \\ \cdot C_{7,3} + 3\left(C_{9,1} \cdot C_{8,4} + C_{9,2} \cdot C_{7,2}\right) + C_{9,3} \cdot C_{6,3} \end{bmatrix} = 19068$$ maneras de distribución.

803. a)Una baraja se puede repartir entre 13 jugadores de $\frac{52!}{(4!)^{13}}$ maneras. b) Si cada uno debe tomar una carta de cada palo, para cada palo obtenemos una permutación de 13 cartas; como las permutaciones de los palos no dependen unas de las otras, obtendremos, en virtud de la regla de la suma $(13!)^4$ formas.

804. Cuatro cartas pueden ser extraídas, de una baraja completa, de $C_{52,4}$ maneras. Exactamente 3 palos habrá en $V_{4,2} \cdot C_{13,1} \cdot C_{13,2} = 518184$ casos: escogemos el palo que falta y el que se repite de $V_{4,2}$ maneras, después de lo cual escogemos dos cartas del palo que se repite de $C_{13,2}$ modos y de una carta de otros dos palos de $(C_{13,1})^2$ modos. Exactamente dos palos habrá en $C_{4,2} \cdot (C_{13,2})^2 + V_{4,2}.C_{13,3} \cdot C_{13,1} = 81120$ casos. En el primer caso hay que escoger dos palos y dos cartas en cada uno de ellos y en el segundo elegir el primero y el segundo palo (aquí ya tiene importancia el orden de éstos) y después tomar tres cartas del primero y una del segundo.

805. Dividamos las 13 cartas de cada palo según la forma $3+3+3+4$. Esto puede efectuarse de $\frac{13!}{4! \cdot (3!)^4}$ maneras. Los grupos de 4 cartas se pueden repartir entre los jugadores de 4! formas y las de 3 de cada palo de 3!. En total obtenemos $(3!)^4 \cdot 4!$ modos de distribución de los grupos. Las cartas a su vez pueden ser repartidas de $\left(\frac{13!}{4! \cdot (3!)^4}\right)^4 \cdot 4! \cdot (3!)^4 = \frac{(13!)^4}{(4!)^3 \cdot (3!)^{12}}$ formas.

806. Distribuyamos a los participantes del reparto en cierto orden. Después de esto, dispongamos de todas las formas posibles, los 18 objetos en orden y dividámoslos en 4 grupos de 4 objetos cada uno y uno de dos objetos. El grupo de dos objetos lo otorgamos a uno de los 5 participantes del reparto, dando los grupos restantes a los demás (el primer grupo al primero; el segundo al segundo, etc.) como el orden de los elementos en los grupos no tiene importancia, se obtienen $\frac{5 \cdot 18!}{(4!)^4 \cdot 2!}$ formas de reparto.

807. Para cada par de elementos hay tres posibilidades: en la elección pueden figurar dos, uno o ninguno del par. Por esto, la cantidad de elecciones es igual a $3^{14} = 4782969$.

808. Las cuatro esferas negras se pueden distribuir en 6 paquetes de $C_{9,5}$ maneras. Para las blancas y las azules tendremos la misma cantidad de formas. En virtud de la regla del producto, obtenemos $(C_{9,5})^3 = 2000376$ maneras.

809. De forma similar al anterior obtenemos $C_{6,3} \cdot C_{13,3} = 5720$.

810. Escojamos tres números naturales cualesquiera, del 1 al $n-2$ agreguemos 2 al mayor de ellos y 1 al segundo en magnitud. Obtendremos tres números de los cuales no habrá dos juntos. Estos dan precisamente, los números de los objetos elegidos. De este modo, la elección se puede efectuar de $C_{n-2,3}$ formas.

811. a) de $PR_{2,2,2,2,2,2,1,1,1,1} = \frac{16!}{2^6}$ maneras.

b) podemos ocupar las casillas libres por fichas iguales y obtener una permutación de 48 fichas y de las figuras indicadas en el problema. El número de estas permutaciones es igual a $PR_{48,2,2,2,2,2,2,1,1,1,1} = \frac{64!}{2^6 \cdot 48!}$.

c) Por el mismo procedimiento se obtiene la respuesta: $PR_{32,8,8,2,2,2,2,2,2,1,1,1,1}$.

812. Supongamos que se han ocupado *p* casillas por fichas blancas y *q* por negras. Las 15 fichas blancas se pueden colocar en *p* casillas, de modo que todas las casillas quedan ocupadas de $C_{14,p-1}$ maneras y las 15 negras en *q* casillas de $C_{14,q-1}$. Se pueden escoger *p* casillas para las fichas blancas y *q* para las negras de $PR_{p,q,24-p-q}$ maneras. Por eso, el número total de formas

es igual a $\sum_{p,q}\left(PR_{p,q,24-p-q}\right)\cdot\left(C_{14,p-1}\right)\cdot\left(C_{14,q-1}\right)$ donde la suma se tome por todos los *p* y *q* tales que: $1\le p\le 15$; $1\le q\le 15$; $p+q\le 24$.

813. Unamos en un mismo grupo las casillas que se transforman una en la otra cuando el tablero se gira en 90^0. Por hipótesis las fichas ocupan 5 de estos grupos, siendo el número total de ellos igual a 16. Por esto tendremos $C_{16,5}=4368$ formas de distribución.

814. Se resuelve análogamente al problema anterior. Hay $C_{32,10}$ maneras.

815. En una mitad del tablero hay que colocar 6 fichas blancas y 6 negras, sobre 16 casillas negras. Esto se puede efectuar de $PR_{6,6,4}=\dfrac{16!}{6!\cdot 6!\cdot 4!}$ modos.

816. La posición de las fichas se determina por cuáles 5 casillas de 7 de la primera fila horizontal están ocupadas por fichas blancas. Por esto tendremos $C_{7,5}=21$ formas.

817. Las posiciones se dividen en dos clases; según esté ocupada o no la casilla angular. Si estas se hallan ocupadas sobre la primera vertical y la primera horizontal habrá 8 fichas más en 12 casillas no angulares, las casillas angulares están libres, en las 12 no angulares de la primera vertical y horizontal habrá 10 fichas. Se le puede disponer de $C_{12,10}=66$ maneras. En total tendremos 51 modos de distribución.

818. Las siete esferas blancas se pueden colocar en 9 hoyos de $C_{15,8}$ formas y las dos negras de $C_{10,8}$. En total tendremos $C_{15,8}\cdot C_{10,8}=289575$ modos.

819. De forma análoga al anterior se obtiene $C_{15,8}\cdot\left(C_{9,8}\right)^2=521235$ maneras.

820. Escojamos primero 9 libros para la persona C. Esto se puede efectuar de $C_{27,9}$ maneras. Los 18 libros restantes se pueden distribuir entre A y B de 2^{18} modos. En total tendremos $2^{18}\cdot C_{27,9}$ formas de reparto.

821. Las 8 personas se pueden distribuir entre los pisos de 4^8 modos. Entre ellos en 3^8 casos no saldría ninguna de las personas en el piso dado, en 2^8 en dos pisos dados y en una en tres pisos prefijados en virtud de la fórmula de inclusiones y exclusiones, obtendremos la respuesta $4^8-4\cdot 3^8+6\cdot 2^8-4=40824$.

822. Son posibles los siguientes casos: por 3 se dividen los tres sumandos, uno y ninguno de ellos. En el primer caso, los sumandos se pueden escoger de $C_{33,3}$ maneras. En el segundo un sumando da como resto 1 y el otro 2. Como hay 34 números del 1 al 100 que dan 1 como resto, 33 que se dividen por 3, 33 que dan resto 2, en el segundo caso tendremos $C_{34,1}\cdot\left(C_{33,1}\right)^2$ formas. Si ninguno de los tres sumandos se divide por 3, estos darán como resto 1, 1 y 1 o bien 2, 2 y 2 correspondientemente, obtenemos $C_{34,3}\cdot C_{33,1}$ casos. En total habrá $2\cdot C_{33,3}+C_{34,1}\cdot\left(C_{33,1}\right)^2=53922$ modos de elección.

823. Resolviendo de forma similar al anterior tenemos que: $3\cdot C_{3n,3}+\left(C_{n,1}\right)^3=\dfrac{n}{2}\left(3n^2-3n+2\right)$.

824. Si se han colocado p esferas blancas; los hoyos ocupados se pueden escoger de $C_{n+1,p}$ formas. Luego quedarán $n-p+1$ hoyos para la esfera negra y además, se puede no colocarla en absoluto. Obtenemos así $n-p+2$ posibilidades. Por esto la respuesta tendrá la forma: $\sum_{p=0}^{n}(n-p+2)\cdot\left(C_{n+1,p}\right)=\sum_{s=1}^{q}s\cdot C_{q,s}+\sum_{p=0}^{q-1}C_{q,p}$ como $\sum_{s=1}^{q}s\cdot C_{q,s}=q^{2q-1}$ y $\sum_{p=0}^{q-1}C_{q,p}=2q-1$ obtenemos la respuesta: $(q+2).2^{q-1}-1$.

825. Designemos un conjunto no vacío de esferas blancas por la letra B, y el de negras, por N. De la hipótesis del problema se deduce que las esferas se distribuyen según uno de los esquemas $NBNB\cdots NB$ o bien $BNBN\cdots BN$ figurando *r* partes en cada conjunto. Pero m esferas blancas se pueden distribuir entre *r* conjuntos no vacíos de $C_{m-1,r-1}$ maneras. Para las esferas negras

tendremos $C_{n-1,r-1}$ modos, habiendo en total $2\cdot C_{m-1,r-1}\cdot C_{n-1,r-1}$. Análogamente se deduce que $2\cdot r$ contactos habrá en $C_{m-1,r}\cdot C_{n-1,r-1}+C_{m-1,r-1}.C_{n-1,r}$ casos.

826. Sea $V_{m,n}$ el número de formas de obtener *m* puntos en *n* exámenes (sin obtener, además, ningún 2). Entonces queda claro que: $V_{30,8}=V_{25,7}+V_{26,7}+V_{27,7}$ etc. Continuando la disminución de m al cabo de varios pasos se obtiene la respuesta 784.

827. Como cada uno puede votar por cualquiera de las *n* personas, tendremos n^n formas de votación. En el segundo caso, hay que dividir *n* votos entre *n* candidatos, cosa que puede efectuarse de $C_{2n-1,n-1}$ maneras.

828. Los números naturales pares mayores que 1500 y menores que 2000 son 1550, 1612, 1674, 1736, 1798, 1860, 1922 y 1984 de estos se eliminan los que tienen sus cifras repetidas y nos quedan 1674, 1736, 1798, 1860 y 1984, de estos eliminamos a 1674 y 1860 por ser divisibles por 3, a 1736 y 1798 por ser divisibles por 7 y solo nos queda el número 1984 que cumple todas las condiciones del problema.

Los problemas . . .

829. Haciendo:

x → cantidad de peces.

$$2x+55=127$$
$$2x=127-55 \qquad x=\frac{72}{2}$$
$$2x=72 \qquad x=36$$

R/ Al principio había 36 peces en el estanque.

830. Considerando que:

x es la primera sección

2x la segunda

2x+5 la tercera

Tenemos que: $x+2x+2x+5=115\Rightarrow 5x=110\Rightarrow x=22$

R/ En la primera sección hay 22 libros, en la segunda 44 y en la tercera 49.

831. Sea $x\rightarrow$ edad de Amparo

$(2x+5)\cdot 3=5x+39\Rightarrow 6x+15=5x+39\Rightarrow x=14$ R/ La edad de Amparo es 14 años.

832. Solo se necesita traducir del lenguaje común al algebraico.

Sea *x* el número:

$$(2x-3)2=102 \qquad 4x=102+6 \qquad x=\frac{108}{4}\Rightarrow x=27$$
$$4x-6=102 \qquad 4x=108$$

R/ El número original es 27.

833. Se puede resolver apoyándose en el Álgebra:

$\overline{xy}\rightarrow$ número de dos cifras

$x\rightarrow$ decenas

$y\rightarrow$ unidades

$$\left.\begin{array}{l}x+y=9\\ \overline{yx}+45=\overline{xy}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+y=9\\ 10y+x+45=10x+y\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+y=9\\ 9x-9y=45\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}x+y=9\\ x-y=5\end{array}\right\}\Rightarrow 2x=14\Rightarrow x=7 \qquad \begin{array}{l}7-y=5\\ y=2\end{array}$$

R/ Eres el número 27

834. *x* → cantidad de papeletas de \$1,50

y → cantidad de papeletas de \$2,00

$$x+y=400$$
$$\underline{1{,}5x+2y=650}$$

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 800 \\ \underline{-1{,}5x - 2y} &\underline{= -650} \\ 0{,}5x &= 150 \\ x &= 300 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y &= 400 - x \\ y &= 400 - 300 \\ y &= 100 \end{aligned}$$

R/ Se vendieron 300 papeletas de \$1,50 y 100 de \$2,00.

835. Considerando que:

$x \to$ cantidad de sacos que carga el caballo

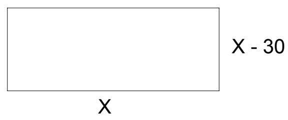
$y \to$ cantidad de sacos que carga el mulo

de aquí tenemos:

$$\begin{aligned} 2(x-1) &= y+1 \\ \underline{x+1} &\underline{= y-1} \\ 2x - 3y &= 3 \\ \underline{x - y} &\underline{= -2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ \underline{-x + y} &\underline{= 2} \\ x &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2 &= y \\ y &= 5 + 2 \\ y &= 7 \end{aligned}$$

R/ El caballo llevaba 5 sacos y el mulo 7 sacos.

836. Sea *x* el largo del terreno, luego el ancho será $x - 30$ como la longitud de la cerca que lo rodea es de 240 metros ese será su perímetro:



$$\begin{aligned} 2(x + x - 30) &= 240 \\ 2x - 30 &= 120 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x &= 150 \\ x &= 75 \end{aligned}$$

Entonces el largo del terreno es 75m y el ancho 45m; por lo que su área es: $A = 75 \cdot 45 \Rightarrow A = 3375\, m^2$

R/ El área del terreno es $3375\, m^2$

837. Sea

$x \to$ cantidad de preguntas correctas

$y \to$ cantidad de preguntas incorrectas

$$\begin{aligned} x + y &= 25 \\ \underline{4x - 2y} &\underline{= 88} \\ 2x + 2y &= 50 \\ \underline{4x - 2y} &\underline{= 88} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 6x &= 138 \\ x &= 23 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 25 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25 \ &- \ 100\,\% \\ \underline{23 \ } &\underline{- \ \ a\,\%} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a &= \frac{23 \cdot 100}{25} \\ a &= 92\% \end{aligned}$$

R/ Contestó correctamente el 92 % de las preguntas del examen.

Otra vía: Designemos por *a* el número de respuestas correctas y como el estudiante contestó las 25 preguntas del examen, el número de respuestas incorrectas será 25-*a*. La cantidad de puntos por respuestas correctas es 4*a*, la cantidad que se resta por respuestas incorrectas es 2(25-*a*), por tanto:

$$\begin{aligned} 4a - 2(25 - a) &= 88 \\ 4a - 50 + 2a &= 88 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 6a &= 138 \\ a &= 23 \end{aligned}$$

R/ Respondió correctamente 23 preguntas que representan el 92%.

838. Sean $x \to$ salario básico

$y \to$ salario por vinculación

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 250 \\ \underline{x - y} &\underline{= 200} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2x = 450 \Rightarrow x = 225$$

Otra vía (numérica)

$$250 + 200 = 450 \Rightarrow 50 : 2 = 225$$

$$250 - 225 = 25 \Rightarrow 225 - 25 = 200$$

R/ El salario básico de Pedro es \$225.

839. Designemos con la letra

$e \rightarrow$ edad del estudiante

$e-3 \rightarrow$ edad del estudiante hace tres años

$e+3 \rightarrow$ edad del estudiante dentro de tres años

de aquí tenemos la ecuación

$3(e+3)-3(e-3)=e \Rightarrow 3e+9-3e+9=e \Rightarrow e=18$

R/ La edad del estudiante es de 18 años.

840. Sea $x \rightarrow$ tiempo que estuvo casado

$\frac{7x}{8} \rightarrow$ tiempo que estuvo soltero

$x+\frac{7x}{8}=60 \Rightarrow \frac{8x+7x}{8}=60 \Rightarrow x=32 \qquad 60-32=28$

R/ Estuvo casado 32 años y soltero 28 años.

841. $x+1 \rightarrow$ primer disparo

$x \rightarrow$ segundo disparo

$x-2 \rightarrow$ tercer disparo

$x+1+x+x-2=26 \Rightarrow 3x=27 \Rightarrow x=9$

R/ Con el primer disparo alcanzó 10 puntos, con el segundo 9 y con el tercero 7.

842. El problema puede resolverse sin recurrir a las ecuaciones: como 12 personas no estaban bailando y son las $\frac{2}{3}$ partes de los que quedan en el salón, entonces bailaban 6 personas, y en total quedaban 18 personas, como la mitad había salido, inicialmente estaban en el salón 36 personas.

Otra vía: $x \rightarrow$ personas en el salón

$\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)=12 \Rightarrow \frac{x}{3}=12 \Rightarrow x=36$

R/ Inicialmente estaban en el salón 36 personas.

843. Si: $x \rightarrow$ cantidad de muchachos

$y \rightarrow$ cantidad de muchachas

$$\begin{aligned} x-2y &= 15 \quad (\mathrm{I}) \\ 5x-2y &= 300 \quad (\mathrm{II}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-15 &= 2y \\ 5(x-15-45) &= y \\ 5(x-60) &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-2y &= 15 \\ -10x+2y &= -600 \\ -9x &= -585 \\ x &= 65 \quad (\mathrm{III}) \end{aligned}$$

$$65-2y=15 \qquad \frac{65-15}{2}=y \qquad y=25$$

R/ Al comienzo de la fiesta había 65 muchachos y 25 muchachas.

844. Hay que tener en cuenta que el hombre estuvo trabajando seis días, desde el 3 hasta el 8 de noviembre ($8-3+1=6$), luego en seis días hizo $\frac{3}{7}$ del trabajo. ¿Qué parte del trabajo hizo en un día?. $\frac{3}{7}:6=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{14}$ luego, para hacer los próximos $\frac{3}{7}$ necesita seis días más y para realizar el $\frac{1}{7}$ del trabajo que le queda necesita $2\cdot\frac{1}{14}=\frac{1}{7}$. Para realizar el trabajo necesita 14 días; lo termina el día 16 de noviembre $(14+3-1=16)$.

845. Para resolver este problema debemos tener en cuenta que se tienen 9 páginas de un dígito, 90 de dos, 900 de tres y así sucesivamente $9\cdot10^{n-1}$, donde *n* es la cantidad de dígitos que tienen esas cifras. En este caso tenemos.

$x \rightarrow$ cantidad de páginas de 3 cifras.

$1\cdot 9+2\cdot 90+3\cdot x=207 \qquad 3x=18$

$189+3\cdot x=207 \qquad x=6$

R/ Entonces tenemos $9+90+6=105$ páginas tiene el folleto.

846. De forma análoga al anterior

$x\rightarrow$ cantidad de páginas de 4 cifras

$1\cdot 9+2\cdot 90+3\cdot 900+4\cdot x=2989 \qquad 2889+4x=2989$

$9+90+2700+4x=2989 \qquad 4x=100\Rightarrow x=25$

R/ Entonces tenemos $9+90+900+25=1024$ páginas tiene el folleto.

847. Aquí es importante razonar que si se tiene un litro de una solución de ácido sulfúrico al 10% es porque se tienen 900ml de agua y 100ml de ácido y con esos mismos 100ml de ácido se debe agregar agua para obtener una solución al 6% por tanto tendríamos:
x es la cantidad de agua que se debe añadir.

$1l=1000ml$

$100=6\%(1000+x)$

$100=\frac{6}{100}(1000+x) \qquad x=\frac{2000}{3}ml$

$5000=3000+3x \qquad x=\frac{2}{3}l$

$2000=3x$

R/ Se debe añadir $\frac{2}{3}l$ de agua para obtener una solución al 6%.

848. Sea $x\rightarrow$ masa del recipiente vacío

$y\rightarrow$ masa del agua

$x+y=2000$

$x-20\%y=64\%\cdot 2000$

$x+y=2000$

$x-\frac{1}{5}y=1280$

$x+y=2000$

$5x-y=6400$

$6x=8400$

$x=1400$

R/ La masa del recipiente vacío es de 1400 gramos.

849. $x\rightarrow$ lado del cuadrado mayor.

$4\rightarrow$ lado del cuadrado menor.

$52\rightarrow$ suma de las áreas de los cuadrados.

$x^2+4^2=52 \qquad x^2-36=0$

$x^2+16=52 \qquad (x-6)(x+6)=0$

$x^2+16-52=0 \qquad x_1=6$

$x_2=-6 \quad imposible$

R/ El lado del cuadrado mayor es de 6cm.

850. Como el terreno tiene forma rectangular y tiene 143m de largo y 39m de ancho. Para que la distancia entre árboles sea la misma se debe calcular el máximo común divisor de 143 y 39. $MCD(143;39)=13$. La distancia entre árboles debe ser de 13m. Para rodear el terreno de árboles tendremos que son 24+4=28 árboles la menor cantidad que se pueden plantar con estas condiciones como muestra la figura:

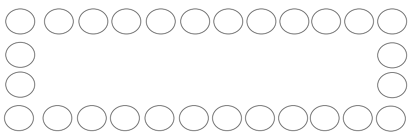


fig a)

851. Como se quieren sembrar las posturas formando cuadrados, el número de estas, en cada fila y columna será el mismo, designemos por *x* este número. Al terminar el cuadrado debían estar sembradas x^2 posturas, al sobrar 132, la cantidad de posturas es x^2+132. Para que el cuadrado tuviera una fila más de largo y una más de ancho, la cantidad total de posturas sembradas debía

ser $(x+1)^2$ pero faltan 29 para completarlo; luego, la cantidad total de posturas con la que cuenta la cuadrilla de obreros también es $(x+1)^2-29$ estableciendo la igualdad se tiene que:

$$(x+1)^2-29=x^2+132 \qquad 2x=132+28$$
$$x^2+2x+1-29=x^2+132 \qquad x=80$$

Por tanto el número total de posturas es $80^2+132=6532$.

Otra vía: Al estar sembradas x^2 posturas sobran 132. para sembrar una fila más de largo harán falta $x+1$ posturas y para otra más de ancho hasta terminar el cuadrado de lado $x+1$ harían falta x posturas más; o sea, haría faltan en total $2x+1$ posturas, pero le faltan 29 a las 132 que tienen para lograr esa cantidad, entonces:

$$2x+1=132+29 \Rightarrow 2x=160 \Rightarrow x=80$$

R/ El número total es: $80^2+132=6532$ posturas.

852. Considerando que:

$x \rightarrow$ días transcurridos.

$365-x \rightarrow$ días restantes del año.

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{3}(365-x)=x$$

$$\frac{x}{2}+\frac{365}{3}-\frac{x}{3}=x \qquad 5x=730$$
$$3x+730-2x=6x \qquad x=146$$

Los cuatro primeros meses tienen 120 días $(31+28+31+30=120)$, luego del quinto mes nos queda $146-120=26$ días que han transcurrido.

R/ El día de hoy es 26 de mayo.

853. Sean

$x \rightarrow$ edad de Alicia

$2x \rightarrow$ edad de la mamá

$2x + 4 \rightarrow$ edad del papá

$$x+2x+2x+4=99$$
$$5x=95$$
$$x=19$$

$$2x=2\cdot 19=38$$
$$2x+4=2\cdot 19+4=42$$

R/ Alicia tiene 19 años.

854. Sea $x \rightarrow$ edad de la persona.

$$2x+x+1=100 \Rightarrow 3x=99 \Rightarrow x=33$$

R/ La edad actual es 33 años.

855. Sea:

$x \rightarrow$ edad del padre.

$y \rightarrow$ edad del hijo.

$$x-y=26$$
$$x+y=27$$
$$2x=53$$
$$x=26{,}5$$
$$x=26\tfrac{1}{2}$$

$$x+y=27$$
$$y=27-26{,}5$$
$$y=0{,}5$$
$$y=\frac{1}{2}$$

R/ La edad del padre es 26 años y medio, o sea 26 años y 6 meses, y la edad del hijo es medio año o 6 meses.

856. Sean:

	Edad actual	Hace 8 años
Padre	*x-8*	*x*
hijo	*y-8*	*y*

$$\left.\begin{array}{l} x-8=3(y-8) \\ x=2y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-3y=-16 \\ x-2y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=16 \qquad \begin{array}{l} x=2\cdot 16 \\ x=32 \end{array}$$

R/ El padre tiene 32 años y el hijo 16.

857. Sí:

$x \rightarrow$ edad de Juan

$y \rightarrow$ edad de la hermana

dentro de 10 años:

$x + 10 \rightarrow$ edad de Juan

$y + 10 \rightarrow$ edad de la hermana

$$\left.\begin{array}{l} x=4y \\ x+10=3(y+10) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=4y \\ x+10=3y+30 \end{array}\right\} \qquad x=4\cdot 20=80$$

$$4y+10=3y+30 \Rightarrow y=20$$

R/ La edad actual de Juan es 80 años.

858. Si

$x \rightarrow$ edad de Ana

$y \rightarrow$ edad de Pedro

$$x = y + 5$$
$$x - 4 = 2(y - 4)$$

$$x = y + 5 \qquad x = 9 + 5$$
$$x - 4 = 2y - 8 \qquad x = 14$$

$$y + 5 - 4 = 2y - 8$$
$$y = 9$$

R/ Ana tiene 14 años y Pedro 9 años.

859. Sea:

$x \rightarrow$ edad de Héctor.

$y \rightarrow$ edad de Alejandro.

	edad actual	hace 22 años
Héctor	x	x-22
Alejandro	y	y-22

$$\left.\begin{array}{l} x=2y \\ x-22=3(y-22) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-2y=0 \\ x-3y=-44 \end{array}\right\} \Rightarrow y=44 \qquad x-2y=0 \Rightarrow x=2y \Rightarrow x=2\cdot 44 \Rightarrow x=88$$

R/ La edad actual de Héctor es 88 años.

860. Sea $x \rightarrow$ años hasta que sumen 75.

$$(40+x)+(9+x)=75$$

$$2x=75-49$$

R/ Dentro de 13 años.

$$x=\frac{26}{2}=13$$

861. Sea $x \rightarrow$ palomas del primer cazador.

$y \rightarrow$ palomas del segundo cazador.

Si el segundo da una al primero:

$x+1=y-1 \Rightarrow x-y=-2$ (I)

Si el primero da una al segundo:

$2(x-1)=y+1 \Rightarrow 2x-y=3$ (II)

De (I)y (II) tenemos:

$$\begin{array}{l} x-y=-2 \\ \underline{2x-y=3} \\ x=5 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5-y=-2 \\ y=7 \end{array}$$

R/ Cazaron 5 y 7 palomas respectivamente.

862. Como la cantidad de piezas que se elaboran en cada turno (días) es la misma, bastaría para saber la cantidad de días que se demora para elaborar las piezas, dividir el total de estas entre la cantidad que elabora en cada turno: $1036:74=14$, luego se demora 14 días en fabricar las piezas. Al comenzar el 4 de mayo y demorar 14 días, cualquiera pensaría incorrectamente que termina el $4+14=18$ (18 de mayo) cuando realmente sería $4+14-1=17$ (17 de mayo), pues es necesario contar el día 4 como el primer día.

Nota: Para conocer la cantidad de elementos que hay entre A y B es $B-A+1$.

863. Sea: $\overline{xy} \to$ número

$$x+y=9 \Rightarrow y=9-x$$

$$\overline{yx}=\frac{5}{6}\overline{xy}$$

$$10y+x=\frac{5}{6}(10x+y) \Rightarrow 60y-5y=50x-6x \Rightarrow 5y=4x$$

Como $y=9-x$ tenemos

$$\begin{array}{l} 5(9-x)=4x \\ 9x=45 \\ x=5 \end{array} \qquad \begin{array}{l} y=9-5 \\ y=4 \end{array}$$

El número es 54.

864. Sea: $\overline{xy} \to$ número

$$\overline{xy}=4(x+y)+3$$

$$\underline{\overline{xy}+18+18=\overline{yx}}$$

$$10x+y=4x+4y+3$$

$$\underline{10x+y+36=10y+x}$$

$$\begin{array}{l} 6x-3y=3 \\ \underline{9x-9y=-36} \\ 2x-y=1 \\ \underline{x-y=-4} \\ x=5 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5-y=-4 \\ y=9 \end{array}$$

R/ El número es 59.

865. Problemas de este tipo se resuelven generalmente por el método de los conocidos problemas de llenado de tanques; o sea, en nuestro problema, se averigua que parte del trabajo realiza en una hora cada mecanógrafa:

	Tiempo que emplean	Parte del trabajo en una hora
1[ra] mecanógrafa	2 h	$\frac{1}{2}$
2[da] mecanógrafa	3 h	$\frac{1}{3}$
Las dos juntas	*x* h	$\frac{1}{x}$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{x} \qquad x=\frac{6}{5}$$

$$3x+2x=6 \qquad x=1\frac{1}{5}$$

R/ Se necesita una hora y doce minutos para realizar el trabajo juntas en el plazo más breve.

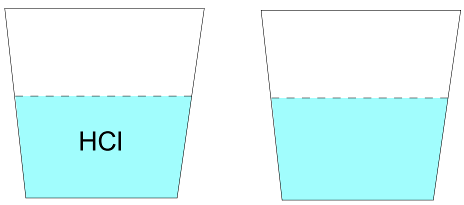
Otro procedimiento: Debemos preguntarnos ¿cómo deben las mecanógrafas repartirse el trabajo para terminarlo a la vez?. Como la mecanógrafa más experimentada escribe $1\frac{1}{2}$ veces más rápidamente que la de menos experiencia, es claro que la parte que tiene que escribir la primera debe ser $1\frac{1}{2}$ veces mayor que lo de la segunda, y entonces ambas terminarán de escribir al mismo tiempo. De aquí se deduce que la primera deberá encargarse de copiar $\frac{3}{5}$ del informe y la segunda $\frac{2}{5}$.

Averigüemos, entonces, en cuánto tiempo la primera mecanógrafa realizará los $\frac{3}{5}$ de su trabajo. El trabajo completo lo pueden hacer en 2 horas, es decir, que $\frac{3}{5}$ de su trabajo lo hará en $2\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$ horas. En el mismo tiempo debe realizar su trabajo la segunda mecanógrafa.

R/ Entonces, el espacio de tiempo más breve, durante el cual pueden ambas mecanógrafas copiar el informe es una hora y doce minutos.

866. En casos como este es recomendable apoyarse previamente en figuras de análisis, para ir representando las situaciones que se presentan en el problema. Supongamos que al principio en la primera probeta había *x* gramos de ácido clorhídrico y en la segunda *x* gramos de agua:

	Probeta que inicialmente contenía HCL	Probeta que inicialmente contenía H_2O
Cantidad de liquido en g.	*x*	*x*
Después del primer trasvaso	x-20	$x+20$
Nuevo trasvaso	$x-20+\frac{2}{3}(x+20)$	$\frac{1}{3}(x+20)$



Ya que se sabe que en la segunda probeta resultó haber la cuarta parte del líquido de la primera tenemos:

$$x-20+\frac{2}{3}(x+20)=4\left[\frac{1}{3}(x+20)\right] \quad 3x+2x-4x=80-40+60$$

$$x-20+\frac{2}{3}x+\frac{40}{3}=\frac{4}{3}x+\frac{80}{3} \quad x=100$$

R/ Es decir en cada probeta había inicialmente 100 gramos de líquido.

867. Designemos el número inicial de billetes de un peso por *b*, y la cantidad de monedas de 20 centavos por *c*. Al salir de compras llevaba en la billetera: $100b+20c$ al regresar tenía $100c+20b$. Sabemos que la última suma es tres veces menor que la primera, luego:

$$3(100c+20b)=100b+20c \quad 4b=28c$$

$$300c+60b=100b+20c \quad b=7c$$

Diferenciemos algunos casos:

- Sí $c=1$, entonces $b=7$. Según esto tenía al comienzo 7 pesos y 20 centavos; lo que no está de acuerdo con la condición del problema: “cerca de 15 pesos”.
- Para $c=2$, entonces $b=14$. Según este caso tenía inicialmente 14 pesos 40 centavos, lo que satisface las condiciones del problema, luego esta es una posible solución.
- Si probamos para $c=3$, se obtiene una suma demasiado grande: 21 pesos 60 centavos. De aquí en adelante cualquier valor de *c* dará un resultado demasiado grande y no satisfacen las condiciones del problema.

Entonces, la única respuesta satisfactoria es 14 pesos y 40 centavos. Después de comprar quedaban dos billetes de un peso y 14 monedas de 20 centavos; o sea; $2\cdot 100+14\cdot 20=480$ centavos; que es, efectivamente, un tercio de lo que tenía inicialmente: $1440:3=480$. Por tanto, lo gastado ascendió a $1440-480=960$. La compra costó 9 pesos con 60 centavos.

868. Sean

$x\rightarrow$ cantidad de collares

$y\rightarrow$ cantidad de lanzas

$z\rightarrow$ cantidad de escudos

$w\rightarrow$ cantidad de cuchillos.

$$\begin{cases} x+y=z & (I) \\ x+w=y & (II) \\ 2z=3w & (III) \end{cases}$$

De (*III*) resulta $z=\frac{3}{2}w \quad (IV)$

De (*IV*) y (*I*) tenemos $w=\frac{2}{3}(x+y)$

De (*II*) resulta

$$x+\frac{2x+2y}{3}=y \Rightarrow 3x+2x+2y=3y \Rightarrow y=5x$$

Una lanza equivale a 5 collares.

869. Sean:

$x\rightarrow$ dinero de José

$y\rightarrow$ dinero de Arturo

$z\rightarrow$ dinero de Vicente

$$\begin{cases} x=\frac{1}{5}y & (I) \\ y=\frac{3}{4}z & (II) \\ z=x+y+12 & (III) \end{cases}$$

Sustituyendo (*II*) en (*I*). $x=\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}z=\frac{3}{20}z \quad (IV)$

Sustituyendo (*IV*) y (*II*) en (*III*).

$$z = \frac{3}{20}z + \frac{3}{4}z + 12$$

$$20z = 3z + 15z + 240$$

$$2z = 240$$

$$z = 120 \quad (V)$$

Sustituyendo (*V*) en (*II*). $y = \frac{3}{4} \cdot 120 = 90$

Sustituyendo (*V*) en (*IV*). $x = \frac{3}{20} \cdot 120 = 18$

R/ José tiene $18, Arturo $90 y Vicente tiene $120.

870. Sean:

a → dinero del primero
b → dinero del segundo
c → dinero del tercero
d → dinero del cuarto

$a + b + c + d = 45$ (I)

$$a + 2 = b - 2 = 2c = \frac{1}{2}d$$

$$a + 2 = b\text{-}2 \Rightarrow b = a + 4 \quad (II)$$

$$a + 2 = 2c \Rightarrow c = \frac{a+2}{2} \quad (III)$$

$$a + 2 = \frac{1}{2}d \Rightarrow d = 2a + 4 \quad (IV)$$

sustituyendo II , III y IV en I.

$$a + a + 4 + \frac{a + 2}{2} + 2a + 4 = 45$$

$$4a + \frac{a+2}{2} + 8 = 45$$

$$4a + \frac{a+2}{2} = 37$$

$$8a + a + 2 = 74$$

$$9a = 72$$

$$a = 8 \quad (V)$$

sustituyendo V en II. $b = 8 + 4 = 12$

sustituyendo V en III. $c = \frac{8+2}{2} = 5$.

sustituyendo V en IV. $d = 2 \cdot 8 + 4 = 20$.

R/ El primero tenía $8, el segundo $12, el tercero $5 y el cuarto $20.

871. Como falleció en el siglo XVI entonces el año tiene la forma $\overline{15du}$ donde *d* es la cifra de las decenas y *u* la de las unidades, ahora $u = d + 2$ además la suma de las cifras es 18.

$$1 + 5 + d + d + 2 = 18$$

$$2d = 10$$

$$d = 5$$

$$u = 5 + 2$$

$$u = 7$$

R/ El año en que falleció Tartaglia fue el 1557.

872. Sean:

x → cantidad de aulas
30*x* + 60→ cantidad de estudiantes

$30x + 60 = 32x + 40 \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = 10 \qquad 30 \cdot 10 + 60 = 360$

R/ Hay 10 aulas y 360 alumnos.

Otra vía: Como al sentar 30 alumnos por cada aula sobran 60 y al sentar 32 sobran 40 es claro que se sientan 2 en cada aula y en total se sientan 20, luego hay 10 aulas, entonces 30·10 + 60 = 360 son los alumnos.

873. Sean

	normal	aumentado
largo	$x + 5$	$x + 8$
ancho	x	$x + 3$

$$x(x+5)+48=(x+8)(x+3) \qquad 6x=24 \qquad 4+5=9$$
$$x^2+5x+48=x^2+11x \qquad x=4$$

R/ Las dimensiones originales son 9cm de largo y 4cm de ancho.

874. Si x es el número tenemos:
$$x-[7-(2x-18)]=8 \qquad 3x=33$$
$$x-[7-2x+18]=8 \qquad x=11$$
$$x+2x-25=8$$
R/ El número es 11.

875. Si x es el numerador
$x + 3$ es el denominador
y la fracción será $\dfrac{x}{x+3}$
luego tenemos que:
$$\frac{x+2}{x+5}=\frac{2}{3} \Rightarrow 3x+6=2x+10 \Rightarrow x=4$$
R/ La fracción original es $\dfrac{4}{7}$.

876. Si x es la cantidad de años dentro de los cuales el padre duplicará la edad de Víctor, tenemos que:
$$37+x=2(16+x) \Rightarrow 37+x=32+2x \Rightarrow x=5$$
R/ Dentro de 5 años el padre duplicará su edad.

877. Sea x es la cantidad de libros que debo comprar o prestar (es importante destacar que en dependencia del signo del resultado del valor de x depende si compro (+) o presto (-)), luego tenemos que:
$$15+x=2(9+x) \Rightarrow 15+x=18+2x \Rightarrow x=-3$$
R/ Luego tengo que prestar 3 libros de álgebra y 3 de geometría.

878. Si:
$x\rightarrow$ cantidad de bicicletas.
$y\rightarrow$ cantidad de triciclos.
$$2x+3y=153 \qquad x+y=68$$
$$\underline{2x+2y=136} \qquad x=68-17$$
$$y=17 \qquad x=51$$
R/ Tenía 17 bicicletas y 51 triciclos.

879. Sea x la distancia que recorrió el primer día.
$\dfrac{2}{3}x$ el segundo día
$\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{3}x\right)=\dfrac{4}{9}x$ el tercer día
$$x+\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}x=57 \qquad 19x=513$$
$$9x+6x+4x=57\cdot 9 \qquad x=27$$
R/ Recorrió 27km el primer día.

880. Considerando que el resto es x entonces el divisor es $x + 3$ y según la división euclidiana se tiene: (D es dividendo, c es cociente, d es divisor y r es resto)
$$\mathrm{D}=c\cdot d+r$$
$$97=4(x+3)+x \qquad 5x=85 \qquad x+3=17+3=20$$
$$4x+12+x=97 \qquad x=17$$
R/ El resto es 17 y el divisor es 20.

881. Sea *x* el valor que debemos sumarle al numerador tenemos:

$$\frac{5+x}{8}=\frac{3}{2} \qquad 2x = 14$$

$$10 + 2x = 24 \qquad x = 7$$

R/ Se le debe sumar 7 al numerador.

882. Consideremos que:

	Edad actual	hace 14 años
padre	*x*	*x – 14*
hijo	*y*	*y – 14*

$$x - 14 = 3(y - 14) \qquad 2y - 14 = 3y - 42 \qquad x = 2 \cdot 28$$

$$\underline{x = 2y} \qquad y = 28 \qquad x = 56$$

R/ El padre tiene 56 años y el hijo 28.

883. Sea

	actual	Dentro de 4 años
Hijo	*x*	*x*+4
padre	*x*+34	*x*+38

$$x+4+x+38=66 \qquad 2x=24$$

$$2x=66-42 \qquad x=12 \qquad 12+34=46$$

R/ El padre tiene 46 años y el hijo 12

884. Tenemos que:

28 años y 4 meses = $28\frac{1}{3}$ años

3 años y 8 meses = $3\frac{2}{3}$ años

	actual	Dentro de *x* años
Juan	$28\frac{1}{3}$	$28\frac{1}{3}$+*x*
hijo	$3\frac{2}{3}$	$3\frac{2}{3}$+*x*

$$28\frac{1}{3}+x=3\left(3\frac{2}{3}+x\right)$$

$$\frac{85}{3}+x=11+3x$$

$$2x=\frac{52}{3}$$

$$x=\frac{26}{3}$$

$$x=8\frac{2}{3} \qquad 28\frac{1}{3}+8\frac{2}{3}=37$$

R/ La edad de Juan será 37 años.

885.

	edad actual	tiempo para la condición
padre	44	*x*
hijo	12	*x*

$$44+x=3(12+x) \qquad 2x=8$$

$$44+x=36+3x \qquad x=4$$

R/ Dentro de 4 años la edad del padre será el triplo de la edad del hijo.

886. Si procedemos utilizando el álgebra tenemos que:

	Edad	Dentro de *x*

	actual	años
padre	*32*	32+ x
hijo	5	5+ x

$$32 + x = 10(5 + x) \Rightarrow 32 + x = 50 + 10x \Rightarrow 9x = -18 \Rightarrow x = -2$$

Este resultado parece imposible, pero en realidad lo que se debe analizar es que el signo nos indica que esto ya pasó, es decir, que dos años atrás la edad del padre (30) era 10 veces la de su hija (3).

887. Sea el número $\overline{ab}$, *a* son las decenas y *b* las unidades y como $b = a + 2$ tenemos:

$$\overline{ab} = 10a + b$$

$$10a + b + 3(a + 2) = 36$$

$$10a + a + 2 + 3a + 6 = 36$$

$$14a = 28 \qquad b = 2 + 2$$

$$a = 2 \qquad b = 4$$

R/ El número es 24.

888. El numerador es *x* y el denominador es *x* + 2, de aquí la fracción es $\dfrac{x}{x + 2}$ por tanto:

$$\frac{x+1}{x+3} = \frac{2}{3}$$

$$3x + 3 = 2x + 6$$

$$x = 3$$

R/ La fracción original es $\dfrac{3}{5}$.

889. Sean

	original	aumentado
ancho	x	x+3
largo	2x	2x-1

$$(x+3)(2x-1) - x(2x) = 3$$

$$2x^2 + 5x - 3 - 2x^2 = 3$$

$$5x = 6$$

$$x = \frac{6}{5}$$

R/ El largo es $\dfrac{12}{5}$ cm y el ancho $\dfrac{6}{5}$ cm.

890. $x \rightarrow$ cifra de las decenas

$y \rightarrow$ cifra de las unidades

$$\overline{xy} = (x + y)\cdot 4 + 3$$

$$\overline{yx} = (x + y)\cdot 6 + 5$$

$$10x + y = 4x + 4y + 3$$

$$10y + x = 6x + 6y + 5$$

$$6x - 3y = 3$$

$$-5x + 4y = 5$$

$$9x = 27$$

$$x = 3$$

$$18 - 3y = 3$$

$$15 = 3y$$

$$y = 5$$

R/ El número es 35.

891. Si las decenas se representan por *a* entonces las unidades por 3*a* y se cumple que:

$$10a + 3a = 4 \cdot 3a + 1$$

$$13a = 12a + 1$$

$$a = 1 \qquad 3a = 3 \cdot 1 = 3$$

R/ El número es 13.

892. Debemos considerar que el nieto nació en el siglo XX, pero su abuelo sería del siglo XIX, luego tendríamos que:

Sea:

$\overline{xy} \rightarrow$ edad del nieto.

$\overline{ab} \rightarrow$ edad del abuelo

$\overline{19xy} \rightarrow$ año del nacimiento del nieto.

$\overline{18ab} \rightarrow$ año del nacimiento del abuelo.

$$1932 - \overline{19xy} = \overline{xy}$$
$$1900 + 32 - 1900 - \overline{xy} = \overline{xy}$$
$$32 - \overline{xy} = \overline{xy}$$

$$32 = 2 \cdot \overline{xy}$$
$$\overline{xy} = 16$$

Luego el nieto nació en 1916 y tenía 16 años.
Ahora:

$$1932 - \overline{18ab} = \overline{ab} \qquad 132 = 2 \cdot \overline{ab}$$
$$1900 + 32 - 1800 - \overline{ab} = \overline{ab} \qquad \overline{ab} = 66$$

R/ Luego el abuelo nació en 1866 y tenía 66 años.

893. Como la velocidad de Juan es 4km/h está claro que el primer cuarto de hora habrá recorrido un kilómetro, y 50 minutos más tarde, cuando es alcanzado, ha caminado durante 65 minutos, (una hora y 5 minutos), luego en la primera hora recorrió 4km, y tenemos que analizar cuánto recorre en esos 5 minutos restantes, con estas distancias tenemos lo que Eduardo ha recorrido en 50 minutos.

5min = $\frac{1}{12}$ horas y 50min = $\frac{5}{6}$ horas

x es el espacio recorrido en 5 minutos

$$\left.\begin{matrix} 4\text{km} ----- 1\text{h} \\ x -------- \frac{1}{12}\text{ h} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \tfrac{1}{3}\text{ km}$$

La distancia recorrida hasta el encuentro es de 4 + $\frac{1}{3}$km = $4\frac{1}{3}$km=$\frac{13}{3}$km y para determinar la velocidad tenemos:

$$V = \frac{s}{t}$$
$$V = \frac{13/3}{5/6} = \frac{13}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{26}{5} = 5{,}2$$

R/ La velocidad de Eduardo es de 5,2km/h.

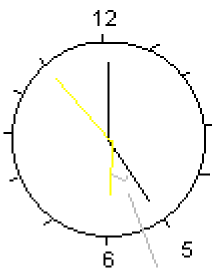
894. a)En casos como este es necesario dibujar previamente la figura de análisis.

Sea:

x el ángulo que recorre el minutero

$\frac{x}{12}$ el ángulo que recorre el horario

y a partir de las conclusiones dadas tenemos que:



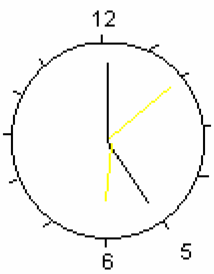
$$x = 25 + \frac{x}{12} + 30 \qquad x = \frac{55 \cdot 12}{11}$$
$$x - \frac{x}{12} = 55 \qquad x = 60$$

R/ Las manecillas del reloj están en oposición a las 6:00

b) De forma análoga

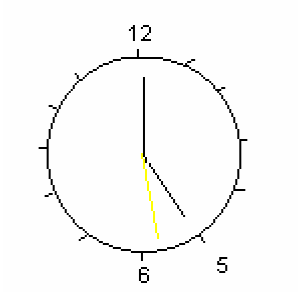
x el ángulo del minutero

$\frac{x}{12}$ el ángulo del horario y tenemos:



$$x + 15 = 25 + \frac{x}{12} \qquad x = 10\frac{10}{11}$$
$$\frac{11}{12}x = 10$$

R/ Forma un ángulo recto por primera vez a las 5 y $10\frac{10}{11}$ minutos.



c) $x = 25 + \frac{x}{12}$ $\quad$ $x - \frac{x}{12} = 25$

$\frac{11}{12}x = 25$

$x = \frac{25 \cdot 12}{11}$

$x = 27\frac{3}{11}$

R/ Las manecillas del reloj se superponen a las 5 y $27\frac{3}{11}$ minutos.

895. El problema puede resolverse por diversos procedimientos:

Un procedimiento:

Sean :

t→ tiempo que demora el joven en encontrar el viejo.

t+5→ tiempo que demora el viejo hasta ser encontrado.

v_1→ velocidad del joven.

v_2→ velocidad del viejo.

t_1= 20 minutos → tiempo que el joven emplea para llegar a la fábrica.

t_2= 30 minutos → tiempo que el viejo emplea para llegar a la fábrica.

$S = v \cdot t$

$S = S_1 = S_2$

$V_1 \cdot t_1 = V_2 \cdot t_2$

$20V_1 = 30V_2$

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{2} \quad (1)$

$S_1 = S_2$

$V_1 \cdot t = 5V_2 + V_2 \cdot t$

$V_1 \cdot t = V_2(t+5)$

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{t+5}{t} \quad (2)$

De (1) y (2) tenemos

$\frac{t+5}{t} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2t + 10 = 3t \Rightarrow t = 10$

R/ El joven encontrará al viejo en 10 minutos.

Otro procedimiento: El joven recorre en 5 minutos $\frac{1}{4}$ del camino, el viejo $\frac{1}{6}$, es decir, menos que el joven en $\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$. Como el viejo había adelantado al joven en $\frac{1}{6}$ del camino, el joven lo alcanzará a los $\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{12}} = 2$ espacio de 5 minutos; o sea, a los 10 minutos.

Un procedimiento más sencillo: para recorre todo el camino, el viejo emplea 10 minutos más que el joven, si el viejo saliera 10 minutos antes que el joven ambos llegarían a la fábrica a la vez; si el viejo solo ha salido 5 minutos antes, el joven debe alcanzarle precisamente a la mitad del camino; es decir, 10 minutos después de salir.

896. Según se dice en la historia, A. Moshkovski, biógrafo y amigo del famoso Albert Einstein, le propuso que resolviera este problema, con el deseo de distraer a su amigo durante su enfermedad y este le contestó:

Sí, este problema es muy apropiado para un hombre obligado por su enfermedad a permanecer acostado en una cama: despierta bastante interés y no es muy fácil. Me temo, sin embargo, que la distracción dure poco tiempo: he dado ya con la forma de resolverlo.

Se incorporó en el lecho y con unos cuantos trazos dibujó en un papel un esquema que reflejaban las condiciones del problema. Einstein no necesitó para resolverlo más tiempo que el que hemos empleado en describir esta historia.

¿Cómo se resuelve?

Se puede medir la distancia que recorren las manecillas, en las 60 divisiones de la esfera, a partir de las 12. Supongamos que en una de las posiciones buscadas, el horario se encuentra a *x* fracciones a partir del número 12, y el minutero, a *y* divisiones. Como las 60 fracciones son recorridas por el horario en 12 horas, es decir, a $\frac{60}{12}=5$ divisiones por hora, entonces, *x* partes de la esfera serán recorridas por el horario en $\frac{x}{5}$ horas; dicho en otra forma ahora han pasado $\frac{x}{5}$ horas desde que el reloj dio las 12. El minutero recorre *y* fracciones en *y* minutos, es decir, en $\frac{y}{5}$ horas. Expresado de otro modo el minutero ha pasado la cifra 12 hace $\frac{y}{5}$ horas, o al cabo de: $\frac{x}{5}-\frac{y}{60}$ horas después de que ambas saetas se encontraban en las 12. Este número es entero (desde cero hasta el 11), ya que muestran cuántas horas completas han pasado desde las 12.

Al cambiar las manecillas de función encontramos por analogía que a partir de las 12 habrían pasado $\frac{y}{5}-\frac{x}{60}$ horas completas. Este número también es entero (desde cero hasta las 11).

De aquí podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones (*m* y *n* son números enteros comprendidos entre el cero y el 11):

$$\frac{x}{5}-\frac{y}{60}=m \quad /\cdot 60$$

$$\frac{y}{5}-\frac{x}{60}=n \quad /\cdot 60$$

$$12x-y=60\,m \quad /\cdot 12$$
$$12y-x=60\,n$$

$$144x-12y=60\cdot 12\,m$$
$$-x+12\,y=60\,n$$

$$143x=60(12m+n)$$

$$x=\frac{60(12m+n)}{143}$$

$$\frac{-60(12m+n)}{143}+12y=60n$$

$$12y=60n+\frac{60(12m+n)}{143}$$

$$y=\frac{60(143n+12m+n)}{12\cdot 143}$$

$$y=\frac{60\cdot 12(12n+m)}{12\cdot 143}$$

$$y=\frac{60(12n+m)}{143}$$

Asignándole a *m* y *n*, valores comprendidos entre 0 y 11 determinamos todas las posiciones requeridas de las saetas. Como cada uno de los 12 valores que tiene *m*, pueden ser confrontados con cada uno de los 12 de *n*; quizás parezca que el número de soluciones posibles puede ser $12\cdot 12=144$, pero en realidad es igual a 143, porque cuando *m* = 0, *n* = 0 y *m* =11, $n=11$, las manecillas ocupan la misma posición. Cuando $m=11$, $n=11$ tenemos: $x=60,\ x=60$, es decir, las manecillas están en las 12, como en el caso de *m* = 0, *n* = 0, que $x=0,\ y=0$, es decir, son las 12.

No nos detendremos en determinar todas las posiciones posibles, sólo se le sugiere que sustituya a *m* y *n* por los valores comprendidos entre 0 y 11 y obtendrán las 143 soluciones en que se pueden cambiar las manecillas de función. Para llegar a los puntos de la esfera donde se encuentran las posiciones requeridas de las saetas, hay que dividir la circunferencia de la esfera en 143 partes iguales, obteniendo 143 puntos que son los que buscamos en los espacios intermedios no hay otras posiciones semejantes de las manecillas.

897. Podemos valernos de las ecuaciones del problema anterior, ya que si las dos manecillas coinciden, pueden cambiar entre sí de función sin que se produzca alteración alguna. En este caso, ambas saetas habrían recorrido el mismo número de divisiones, a partir del número 12, es decir, *x* = *y*. Por otra causa, los razonamientos del problema precedente nos brindan la siguiente

expresión: $\frac{x}{5}-\frac{x}{60}=m$, donde *m* es un entero comprendido entre 0 y 11 y de aquí tenemos que:

$$12x-x=60m \Rightarrow 11x=60m \Rightarrow x=\frac{60m}{11}$$

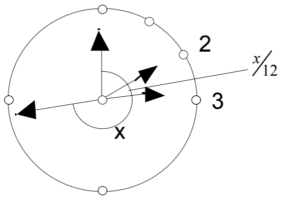
De los 12 valores de *m* (del 0 al 11) obtenemos en lugar de 12, sólo 11 posiciones diversas de las manecillas, toda vez que siendo *m* = 11 vemos que *x* = 60, es decir, ambas saetas han recorrido 60 divisiones y se hallan en la cifra 12; esto mismo sucede cuando *m* = 0, las dos manecillas se hallan en las 12.

Las otras soluciones son:

$1\frac{1}{11};2\frac{2}{11};3\frac{3}{11};4\frac{4}{11};5\frac{5}{11};6\frac{6}{11};7\frac{7}{11};8\frac{8}{11};9\frac{9}{11};10\frac{10}{11}.$

898. *x*→ ángulo en minutos que recorrió el minutero

$\frac{x}{12}$→ ángulo en minutos que recorrió el horario



$$x=10+\frac{x}{12}+30 \qquad x=\frac{40\cdot 12}{11}$$

$$x-\frac{x}{12}=40 \qquad x=43\frac{7}{11}$$

R/ Se encuentran en oposición a las 2 horas y $43\frac{7}{11}$ minutos.

899. *x*→ días para leer el libro

y→ páginas leídas por día

$$480=xy \quad (I)$$

$$480=(x-5)(y+16) \quad (II)$$

De (I) y (II) tenemos:

$$xy=(x-5)(y+16)$$
$$xy=xy+16x-5y-80$$
$$16x-5y=80$$
$$y=\frac{16x-80}{5} \quad (III)$$

Sustituyendo (III) en (I)

$$480=x\left(\frac{16-x}{5}\right)$$
$$16x^2-80x-2400=0$$
$$x^2-5x-150=0$$
$$(x-15)(x+10)=0$$
$$x_1=15$$
$x_2=-10$ imposible

R/ El estudiante leyó el libro en 15 días.

Otra vía:

x→ número de páginas que lee en un día

$$\frac{480}{x}-5=\frac{480}{x+16}$$
$$(480-5x)(x+16)=480x$$
$$480x-5x^2-80x+7680=480x$$
$$5x^2+80x-7680=0$$
$$x^2+16x-1536=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-16\pm\sqrt{16^2+4\cdot 1536}}{2}$$
$$x_{1,2}=\frac{-16\pm\sqrt{6400}}{2}$$
$$x_{1,2}=\frac{-16\pm 80}{2}$$
$$x_1=32$$
$x_2=-48$ imposible

$\frac{480}{32}=15$ R/ El estudiante leyó el libro en 15 días.

900. *x*→ el menor de los números.

x+10→ el mayor de los números.

De acuerdo a la situación planteada tenemos:

$$(x+10)\cdot x-40=39x+22 \qquad (x-31)(x+2)=0$$
$$x^2+10x-40=39x+22 \qquad x_1=31$$
$$x^2-29x-62=0 \qquad x_2=-2 \ \textit{imposible}$$

R/ Los números son 31 y 41

901. Una forma de proceder es de la última condición a la primera. Como el tercero toma la tercera parte y en la cesta quedan 8 (dos terceras partes), tomó 4 y había 12 antes de tomarlos, y como el segundo tomó la tercera parte y quedaron 12 (dos terceras partes), él tomó 6 y habían 18 y de la misma forma el primero tomó 9 y dejó 18; por tanto, al inicio había en la cesta 27 caramelos.

Otra vía:

Apoyándonos en el Álgebra

x→ cantidad de caramelos en la cesta.

El mayor tomó $\frac{1}{3}x$ queda $x-\frac{1}{3}x=\frac{2}{3}x$

El mediano tomó $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}x\right)=\frac{2}{9}x$ queda $\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}x=\frac{4}{9}x$

El pequeño tomó $\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}x\right)=\frac{4}{27}x$ queda $\frac{4}{9}x-\frac{4}{27}x=\frac{8}{27}x$

$$\frac{8}{27}x=8\Rightarrow x=\frac{8\cdot 27}{8}\Rightarrow x=27$$

R/ Inicialmente había 27 caramelos en la cesta.

902. Este problema se resuelve inmediatamente si se reflexiona que al sexto comprador le tocó una naranja entera, entonces al quinto le tocaron 2, al cuarto 4, al tercero 8 y así sucesivamente. En total eran $1+2+4+8+16+32=63$ naranjas.

Otra forma es mediante el planteo de una ecuación.

Sea *x* cantidad de naranjas que trajo la campesina.

1er comprador: $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2}$ Quedó: $x-\frac{x+1}{2}=\frac{x-1}{2}$

2do comp: $\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{4}$ Quedó: $\frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{4}=\frac{x-3}{4}$

3er comp: $\frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{4}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{8}$ Quedó: $\frac{x-3}{4}-\frac{x+1}{8}=\frac{x-7}{8}$

4to comp: $\frac{1}{2}\left(\frac{x-7}{8}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{16}$ Quedó: $\frac{x-7}{8}-\frac{x+1}{16}=\frac{x-15}{16}$

5tocomp: $\frac{1}{2}\left(\frac{x-15}{16}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{32}$ Quedó: $\frac{x-15}{16}-\frac{x+1}{32}=\frac{x-31}{32}$

6tocomp: $\frac{1}{2}\left(\frac{x-31}{32}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{64}$ Quedó $\frac{x-31}{32}-\frac{x+1}{64}=\frac{x-63}{64}$

$\frac{x-63}{64}=0\Rightarrow x-63=0\Rightarrow x=63$. R/ Son 63 naranjas

903. Sea $\overline{abc}=100a+10b+c$ el número buscado.

$$\overline{abc}-396=\overline{cba}$$

$a=2c$ $\qquad 200c+10c+30+c-396=100c+10c+30+2c$

$b=c+3$ $\qquad 99c=396$

$$c=4$$

$a=2\cdot 4=8$

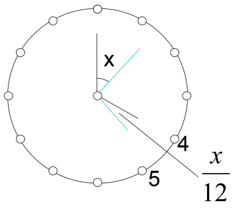
$b=4+3=7$

R/ El número es 874.

904. Aquí se nos presentan dos posibilidades:

Antes que el minutero adelante al horario

Sea *x*→ ángulo que recorre el minutero.

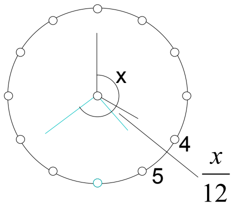


$\frac{x}{12} \rightarrow$ ángulo que recorre el horario.

$$x+15=20+\frac{x}{12}$$

$$x-\frac{x}{12}=5 \qquad x=\frac{5\cdot 12}{11}$$

$$\frac{11}{12}x=5 \qquad x=5\tfrac{5}{11}$$



R/ A las 4 horas y $5\tfrac{5}{11}$ minutos.

Después que el minutero adelante al horario.

Los mismos datos

$$\frac{11}{12}x=35$$

$$x=20+\frac{x}{12}+15 \qquad x=\frac{35\cdot 12}{11}$$

$$x-\frac{x}{12}=35 \qquad x=38\tfrac{2}{11}$$

R/ A las 4 horas y $38\tfrac{2}{11}$ minutos.

905. Sea

	Lados más largos	Lados más cortos
Rectángulo 1	11,9	*x*
Rectángulo 2	8,5	*x*+1,4

$$11{,}9x=8{,}5(x+1{,}4) \qquad x=\frac{11{,}9}{3{,}4} \qquad 3{,}5+1{,}4=4{,}9$$

$$11{,}9-8{,}5x=11{,}9$$

$$3{,}4x=11{,}9 \qquad x=3{,}5$$

R/ El lado más corto del primer rectángulo es 3,5 y el segundo es 4,9.

906. Dada

edad	Cuando nació la sobrina	actual	el tío tenía la edad de la sobrina
sobrina	0	*x*	x-10
tío	10	$10+x$	*x*

De acuerdo con las condiciones tenemos:

$$10+x=2(x-10)\Rightarrow 10+x=2x-20\Rightarrow x=30$$

R/ La sobrina tiene 30 años y el tío 40.

907. Este problema que es considerado el problema de Newton acerca de los toros, aunque se dice que en realidad no fue ideado por Newton sino que es de origen popular se puede resolver considerando que *x* es la parte de la reserva inicial de hierva que crece en una hectárea durante una semana.

Como el primer prado tiene $3\frac{1}{3}ha$, en la primera semana la hierba crecerá a $3\frac{1}{3}\cdot x$, y durante las cuatro semanas $3\frac{1}{3}\cdot x\cdot 4=\frac{10}{3}x\cdot 4=\frac{40}{3}\cdot x$ de la reserva de hierba que había inicialmente en una hectárea.

Esto equivale a un crecimiento del área inicial del prado igual a:
$\left(3\frac{1}{3}+\frac{40}{3}x\right)ha$ (el promedio inicial más el crecimiento de las cuatro semanas). En otras palabras, los toros comen tanta hierba como se precisa para cubrir un prado de $\left(3\frac{1}{3}+\frac{40}{3}x\right)ha$. En una semana 12 toros se comen un cuarto de esta cantidad, o sea $\left(\frac{10}{3}+\frac{40}{3}x\right)\cdot\frac{1}{4}$ y un toro come en una semana $\frac{1}{12}$ de la cantidad anterior, es decir

$$\left(\frac{10}{3}+\frac{40}{3}x\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{12}=\left(\frac{10}{3}+\frac{40}{3}x\right)\cdot\frac{1}{48}=\frac{10+40x}{144}ha\ .$$

De la misma manera con los datos del segundo prado, hallamos el área de este que alimenta un solo toro durante una semana: crecimiento de la hierba en una *ha* durante una semana es *x*.
Crecimiento de la hierba en una *ha* durante nueve semanas es 9*x*
Crecimiento de la hierba en 10*ha* durante nueve semanas es 90*x*.
La superficie que contiene hierba suficiente para alimentar 21 toros durante 9 semanas es igual a 10 + 90*x.*
El área necesaria para mantener un toro durante una semana es:

$$\frac{10+90x}{9\cdot 21}=\frac{10+90x}{189}ha$$

y como ambas normas de alimentación deben ser iguales tenemos que:

$$\frac{10+40x}{144}=\frac{10+90x}{189}$$

$$189\cdot(10+40x)=144(10+90x)$$

$$1890+7560x=1440+12969x$$

$$5400x=450$$

$$x=\frac{450}{5400}\Rightarrow x=\frac{1}{12}$$

hemos encontrado la cantidad de hierba que crece en una *ha* durante una semana, ahora debemos ver cual es el área del prado con hierba suficiente para mantener a un toro durante una semana que es:

$$\frac{10+40x}{144}=\frac{10+40\cdot\frac{1}{12}}{144}=\frac{10+\frac{10}{3}}{144}=\frac{\frac{40}{3}}{144}=\frac{5}{54}ha$$

Ahora nos ocuparemos de la pregunta del problema:
Sea *y* el número de toros que durante 18 semanas deben pastar en un área de 24 ha, tenemos que:

$$\frac{24+24\cdot 18\cdot\frac{1}{12}}{18\cdot y}=\frac{5}{54}$$

$$\frac{24+36}{18y}=\frac{5}{54}$$

$$\frac{60}{18y}=\frac{5}{54}$$

$$\frac{10}{3y}=\frac{5}{54}$$

$$15y=540$$

$$y=36$$

R/ el tercer prado de 24 ha puede mantener 36 toros durante 18 semanas.

908. Este problema sirvió de argumento para un cuento humorístico, que recuerda el maestro particular de Chejóv. Dos adultos, familiares de un escolar a quien habían encargado resolver este problema, se esforzaban inútilmente por hallar su solución y se asombraban: -¡Qué extraño es el resultado! –dijo uno-. Si en 24 días 70 vacas se comen la hierba, entonces, ¿cuántas vacas se la

comerán en 96 días?. Claro que $\frac{1}{4}$ de 70, es decir, $17\frac{1}{2}$ vacas**...** ¡Este es el primer absurdo!. El segundo todavía más extraño, es que si 30 vacas se comen la hierba en 60 días, en 96 se la comerán $18\frac{3}{4}$ vacas. Además, si 70 vacas se comen la hierba en 24 días, 30 vacas emplean en ello 56 días, y no 60, como afirma el problema. -¿Pero tiene usted en cuenta que la hierva crece sin cesar? – preguntó el otro. La observación era razonable, la hierba crece incesantemente, circunstancia que no puede echarse en olvido, pues en ese caso no solo puede resolverse el problema, sino que sus mismas condiciones parecerán contradictorias.

¿Cómo debe resolverse pues, el problema?

Introduzcamos también aquí una segunda incógnita, que representará el crecimiento diario de la hierba, expresado en partes de las reservas de la misma en el prado. En una jornada hay un crecimiento de y; en 24 días será 24y .

Si tomamos todo el pasto como 1, entonces, en 24 días las vacas se comerán $1+24y$, en una jornada las 70 vacas comerán $\frac{1+24y}{24}$ y una vaca (de las 70) comerá $\frac{1+24}{24\cdot 70}$.

Siguiendo el mismo razonamiento: si 30 vacas acaban con toda la hierba del prado en 60 días, una vaca comerá en un día $\frac{1+60y}{30\cdot 60}$. Pero la cantidad de hierva comida por una vaca en un solo día es igual para los dos rebaños. Por eso:

$$\frac{1+24y}{24\cdot 70}=\frac{1+60y}{30\cdot 60} \qquad 480y=1$$

$$30\cdot 60(1+24y)=24\cdot 70(1+60y) \qquad y=\frac{1}{480}$$

$$15+360y=14+840y$$

Cuando se haya *y* (medida de crecimiento) es ya fácil determinar qué parte de la reserva inicial se come una vaca al día.

$$\frac{1+24y}{24\cdot 70}=\frac{1+24\cdot\frac{1}{480}}{24\cdot 70}=\frac{1+\frac{1}{20}}{24\cdot 70}=\frac{21}{20}\cdot\frac{1}{24\cdot 70}=\frac{1}{1600}$$

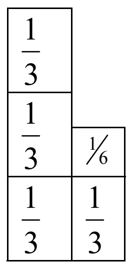
Por último establecemos la ecuación para la solución definitiva del problema. Si el número de vacas es *x*, entonces:

$$\frac{1+96\cdot\frac{1}{480}}{96x}=\frac{1}{1600}\Rightarrow\frac{1+\frac{1}{5}}{96x}=\frac{1}{1600}$$

$$\frac{6}{5}=\frac{96x}{1600}\Rightarrow x=\frac{6\cdot 1600}{5\cdot 96}\Rightarrow x=20$$

R/ 20 vacas se comerán toda la hierba en 96 días.

909. Este problema es tan fácil resolverlo por medio de la aritmética, que no merece, en absoluto, la pena servirse del álgebra para resolverlo.



Queda claro que si el prado mayor fue segado por todo el grupo en medio día y por la mitad de la gente en el resto de la jornada, la mitad del grupo segó en medio día $\frac{1}{3}$ del prado. Por consiguiente, en el prado menor quedaban sin segar $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$. Si un trabajador segó en un día $\frac{1}{6}$ del prado y en un día fueron segados $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ es decir $\frac{8}{6}$, esto quiere decir que había 8 segadores.

910. Considerando que:

x→ unidades

x -3→ decenas

$(x-3)\cdot 10+x$ → es el número

$10x+x-3$ → es el número invertido

$$10x+x-3-10x+30-x=27$$

$$11x-3-11x+30=27$$

$$27=27(*)$$

Esto nos quiere decir que cualquier número de dos cifras que las decenas sean tres unidades menor que las unidades cumple esa condición, luego esos números son: 14, 25, 36, 47, 58, 69.

911. Sea:

x→ cantidad de agua oxigenada al 30%

y→ cantidad de agua oxigenada al 3%

$$30\%x+3\%y=12\%(x+y)$$

$$\frac{30}{100}x+\frac{3}{10}y=\frac{12}{100}(x+y)$$

$$30x+3y=12x+12y$$

$$30x-12x=12y-3y$$

$$18x=9y$$

$$y=2x$$

Podemos obtener esta solución siempre que se eche el doble de la solución al 3% que la que se eche al 30%.

912. Si los tranvías salían cada *x* minutos, eso quiere decir, que por aquel lugar donde yo me encontraba con un tranvía tenía que pasar el siguiente después de *x* minutos. Si él iba en mi dirección, entonces en $12 - x$ minutos debía recorrer el camino que yo hacía en 12 minutos. Eso significa que el camino que yo ando en un minuto el tranvía lo hacía en $\frac{12-x}{12}$ minutos. Si el tranvía iba en dirección contraria nos cruzábamos 4 minutos después de encontrarse con el anterior, y en el tiempo restante de $x - 4$ minutos debía recorrer el camino echo por mí en esos 4 minutos, por lo tanto, el camino que yo andaba en un minuto, lo hacía el tranvía en $\frac{x-4}{4}$ minutos. Tenemos pues la ecuación:

$$\frac{12-x}{12}=\frac{x-4}{4}$$

$$12-x=3(x-4)$$

$$4x=12+12$$

$$x=6$$

Entonces cada 6 minutos iniciaban los tranvías su itinerario.

Otra vía:

Expresemos la distancia que separaba a los tranvías entre si, con la letra *a*. Entonces la distancia que mediaba entre el tranvía que iba a mi encuentro y yo disminuía en $\frac{a}{4}$ cada minuto (por cuanto la distancia entre el tranvía que acababa de pasar y el siguiente, igual a *a*, lo recorríamos en 4 minutos). Si el tranvía iba en mi dirección, la distancia entre nosotros se reducía cada minuto en $\frac{a}{12}$. Supongamos que yo marchaba hacia delante durante un minuto y después anduviera otro minuto hacia atrás (es decir, regresara al punto de partida). En este caso la distancia que mediaba entre el tranvía – que iba a mi encuentro – disminuía durante el primer minuto en $\frac{a}{4}$, y en el segundo minuto, en $\frac{a}{12}$. En consecuencia, en el lapso de dos minutos, la distancia entre nosotros se reducirá en $\frac{a}{4}+\frac{a}{12}=\frac{4a}{12}=\frac{a}{3}$ lo mismo había ocurrido si yo hubiera permanecido inmóvil en el sitio, ya que, en fin de cuentas, volvería hacia atrás. De esta manera, si yo no hubiera avanzado, en un minuto (no en dos) el tranvía se hubiera acercado hacia mi en $\frac{a}{3}:2=\frac{a}{6}$, y toda la distancia *a* la habría recorrido en 6 minutos. Por ello, para un observador inmóvil, los tranvías pasaban con intervalos de 6 minutos.

913. Expresemos con *x* el tiempo (en horas) que necesita el barco para recorrer la distancia que separa A de B en el agua tranquila (es decir con la velocidad del barco) y con *y* el tiempo que se desliza la balsa. Siendo así, en una hora el barco recorre $\frac{1}{x}$ de la distancia $\overline{AB}$, y la balsa (al igual que la corriente) $\frac{1}{y}$ de esta distancia. Por esta razón, el barco, marchando impulsado por la corriente (a favor de la corriente), en una hora recorre $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ de $\overline{AB}$, y hacia arriba (contra la corriente), $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$. Por las condiciones del problema se deduce que hacia abajo el barco hace en una hora $\frac{1}{5}$ de la distancia y hacia arriba $\frac{1}{7}$. De aquí el sistema:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=\frac{1}{5}\\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}&=\frac{1}{7}\end{aligned}\right\}$$

para solucionar este sistema no hace falta eliminar los denominadores, es suficiente con restar la segunda ecuación de la primera y nos queda: $\frac{2}{y}=\frac{2}{35}$ de donde $y=35$.

R/ Luego la balsa se desplaza desde A hasta B en 35 horas.

914. *x*→ peso del contenido del pote grande.
y→ peso del contenido del bote pequeño.
z→ peso del pote grande.
t→ peso del pote pequeño.

De acuerdo con las condiciones del problema tenemos que:

$$\left.\begin{aligned}x+z&=2\\ y+t&=1\end{aligned}\right\}\ (1)$$

teniendo en cuenta que los pesos del contenido de ambos potes repletos se relacionan entre sí como sus propios volúmenes, es decir, como el cubo de sus alturas, resulta que:

$$\frac{x}{y}=\frac{12^3}{9{,}5^3}\approx 2{,}02 \quad \text{ó} \quad x=2{,}02y\ (2)$$

el peso de los potes vacíos se relacionan entre sí como se relacionan sus superficies completas, es decir como los cuadrados de sus alturas, por ello:

$$\frac{z}{t}=\frac{12^2}{9{,}5^2}\approx 1{,}6 \qquad \text{ó} \qquad z=1{,}6t\ (3)$$

Sustituyendo los valores de *x* y *z* en (1) tenemos es siguiente sistema:

$$2{,}02y+1{,}6t=2\ \ (4)$$
$$y+t=1$$
$$y=1-t\ \ (5)$$

sustituyendo (5) en (4)

$$2{,}02(1-t)+1{,}6t=2$$
$$2{,}02-2{,}02t+1{,}6t=2$$
$$-0{,}42t=-0{,}02$$
$$t=\frac{-0{,}02}{0{,}42}=\frac{1}{21}$$
$$t\approx 0{,}05$$

$$y=1-\frac{1}{21}$$
$$y=\frac{20}{21}$$
$$y\approx 0{,}95$$

$x = 2{,}02 \cdot 0{,}95$ $\qquad$ $z = 1{,}6 \cdot 0{,}05$

$x \approx 1{,}92$ $\qquad$ $z \approx 0{,}08$

R/ El peso del café sin el envase será: el pote grande 1,92kg y el del pote pequeño 0,95kg.

915. La solución es muy sencilla si se elige con acierto la incógnita. Busquemos el número de los jóvenes, que expresamos con *x*.

La primera, María bailó con 6+1 muchachos
La segunda, Olga bailó con 6+2 muchachos
La tercera, Vera bailó con 6+3 muchachos
$\vdots$ $\qquad$ $\vdots$
La *x* - ava, Lili bailó con $6+x$ muchachos
establezcamos la siguiente ecuación:

$$x + (6 + x) = 20 \Rightarrow 2x = 20 - 6 \Rightarrow x = 7$$

Por lo tanto el número de muchachos es $20 - 7 = 13$ ó $6 + 7 = 13$.

916. Si la velocidad del primer ciclista es *x*m/seg, en 10 segundos habrá recorrido 10*x* metros. El segundo (yendo al encuentro) recorre el resto de la vuelta en el intervalo que media entre dos cruces, es decir, $170 - 10x$ metros. Si la velocidad del segundo es *y*, este recorre 10*y* metros; por lo tanto: $170 - 10x = 10y$ ó $x + y = 17(1)$. Si los ciclistas marchan uno tras otro, en 170 segundos el primero recorre 170*x* metros, y el segundo 170*y* metros. Si el primero marcha más deprisa que el segundo de un encuentro al otro corre una vuelta más que el segundo, es decir: $170x - 170y = 170$ ó $x - y = 1(2)$.

De (1) y (2) tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 17 \\ \underline{x - y = 1} \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 18 \Rightarrow x = 9 \qquad \begin{array}{l} y = 17 - 9 \\ y = 8 \end{array}$$

R/ El primer ciclista va a 9m/seg. y el segundo a 8m/seg.

917. Sea

x→ Velocidad de la segunda moto
x+15→ Velocidad de la primera moto
x-3→ Velocidad de la tercera moto
si la distancia la expresamos por *y* entonces el tiempo será:

para la primera moto $\dfrac{y}{x+15}$

para la segunda $\dfrac{y}{x}$

para la tercera $\dfrac{y}{x-3}$

La segunda moto hizo el recorrido en 12 minutos ($\dfrac{12}{60} = \dfrac{1}{5}$ horas) más que la primera, por tanto tenemos: $\dfrac{y}{x} - \dfrac{y}{x+15} = \dfrac{1}{5}(1)$

la tercera empleó en la carrera 3 minutos ($\dfrac{3}{60} = \dfrac{1}{20}$ horas) más que la segunda y por consiguiente:

$\dfrac{y}{x-3} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{20}$ ó $4\left(\dfrac{y}{x-3} - \dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{1}{5}(2)$. De (1) y (2) tenemos:

$\dfrac{y}{x} - \dfrac{y}{x+15} - 4\left(\dfrac{y}{x-3} - \dfrac{y}{x}\right) = 0$ como $y \neq 0$ dividimos por y

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+15} - \frac{4}{x-3} + \frac{4}{x} = 0$$

$$(x+15)(x-3)-x(x-3)-4x(x+15)+4(x+15)(x-3)=0$$
$$5(x^2+12x-45)-x^2+3x-4x^2-60x=0$$
$$5x^2+60x-225-5x^2-60x+3x=0$$
$$3x-225=0 \Rightarrow x=\frac{225}{3} \Rightarrow x=75$$

La primer moto iba a 90km/h, la segunda a 75km/h y la tercera a 72km/h.
Sustituyendo en (1) tenemos:

$$\frac{y}{75}-\frac{y}{90}=\frac{1}{5} \Rightarrow 6y-5y=90 \Rightarrow y=90$$

Luego la distancia será de 90km.
Y el tiempo de cada moto es:

Primera $\frac{90}{90}=1$ hora

Segunda $\frac{90}{75}=1$ hora y 12 minutos.

Tercera $\frac{90}{72}=1$ hora y 15 minutos.

918. La aparente sencillez del problema confunde a muchos. Sin pensar detenidamente en él, hallar la media aritmética de 60 y 40, es decir, $\frac{60+40}{2}=50$ km. Esta "simple" solución sería cierta si la ida y la vuelta hubieran durado el mismo tiempo. Pero es evidente que el recorrido de vuelta (a menor velocidad) requiere más tiempo que la ida. Si tenemos esto en cuenta, veremos que la respuesta de 50km es errónea.
No resulta difícil establecer la ecuación si introducimos una incógnita auxiliar: la magnitud *d*, distancia entre las dos ciudades. Expresemos con *x* la velocidad media buscada y formemos la ecuación:

$$\frac{2d}{x}=\frac{d}{60}+\frac{d}{40} \Rightarrow \frac{2}{x}=\frac{1}{60}+\frac{1}{40}$$

$$\frac{2}{\frac{1}{60}+\frac{1}{40}}=x \quad \text{(esta es la media armónica)}$$

$$x=\frac{2}{\frac{2+3}{120}}=2\cdot\frac{120}{5}=2\cdot 24=48$$

La velocidad media es de 48km/h.
Por tanto, la velocidad media del recorrido se expresa, no con la media aritmética, sino con la media armónica de las velocidades. Para *a* y *b* positivas, la media armónica, siempre será menor que la media aritmética. $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}<\frac{a+b}{2}$.

919. Este problema no se presta a la traducción directa al lenguaje algebraico, pues no puede construirse la ecuación necesaria. Es preciso resolverlo mediante un procedimiento especial, el llamado razonamiento matemático libre. Más también aquí el álgebra presta a la aritmética una buena ayuda.
El valor en pesos de todo el rebaño es un cuadrado perfecto, pues el rebaño se adquirió con el dinero de la venta de *n* toros a *n* pesos por cabeza. Uno de ellos recibe una oveja más, por lo tanto, el número de ovejas es impar. Por lo mismo es impar el número de decenas en la cantidad n^2. ¿Cuál es la cifra de las unidades?
Podemos demostrar que si en un cuadrado exacto la cifra de las decenas es impar, la de las unidades debe ser solo seis. Efectivamente, el cuadrado de todo número compuesto de *a* decenas y *b* unidades, es decir

$(10a+b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2 = (10a^2 + 2ab)\cdot 10 + b^2$. El número de decenas en esta cantidad es $10a^2 + 2ab$ más algunas decenas comprendidas en b^2. Pero $10a^2 + 2ab$ es divisible por 2, es un número par. El número de decenas comprendidas en $(10a+b)^2$ resultará impar solo cuando en el número b^2 haya un número impar de decenas. Recordemos lo que representa b^2; este número es el cuadrado de las cifras de las unidades, es decir, una de las cifras siguientes: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81. Entre ellas, solo 16 y 36 tienen decenas impares, y ambas terminan en 6, esto quiere decir que el cuadrado perfecto $100a^2 + 20ab + b^2$ puede tener un número impar de decenas solo en el caso en que termine en 6.

Ahora ya es fácil hallar la respuesta: es evidente que el corderito costó 6 pesos. El socio a quien correspondió este, recibió 4 pesos menos que el compañero. Para que el reparto sea equitativo, el que compra el cordero debe ser compensado por su socio con 2 pesos.

La compensación es de 2 pesos.

920. Si expresamos el número

$\overline{aabb} = 1000a + 100a + 10b + b = 1100a + 11b = 11(100a + b)$, Este número es divisible por 11 y por eso (siendo un cuadrado perfecto) se divide también por 11^2, con otras palabras, el número $100a + b$ se divide por 11. al emplear cualquiera de los criterios de divisibilidad, deducimos que el número $a+b$ es divisible por 11, pero esto significa que $a+b=11$, por cuanto cada una de las cifras *a* y *b* es menor que 10. la ultima cifra *b* que es un cuadrado perfecto, puede tomar los valores 0, 1, 4, 5, 6, 9. por eso, para la cifra *a*, que es igual a$11-b$, se tienen los siguientes valores: 11, 10, 7, 6, 5, 2. los dos primeros valores son inaceptables quedando, pues los siguientes:

$b=4 \quad a=7$; $b=5 \quad a=6$; $b=6 \quad a=5$; $b=9 \quad a=2$

Los números deben ser 7744, 6655, 5566,2299, pero ninguno de los tres últimos son cuadrados perfectos (el 6655 es divisible por 5 pero no por 25, el 5566 es divisible por 2 pero no por 4, y el 2299 (producto de 121·19) tampoco es cuadrado perfecto. No queda más que 7744, segunda potencia de 88, que nos ofrece la solución del problema.

921. La misión del problema se reduce a saber cuántos billetes de 3 pesos debe entregar a la cajera para que ella le devuelva con billetes de 5 pesos y cobre los 19 pesos. Las incógnitas son dos:

x→ billetes de 3 pesos

y→ billetes de 5 pesos

y resulta la ecuación diofantica $3x - 5y = 19$ que tiene infinitas soluciones, pero que necesitamos aquellas en que *x*, *y* sean números enteros y positivos (se trata del número de billetes de banco). Para lograra esto despejamos la incógnita cuyo coeficiente es menor, es decir $3x$ y tenemos:

$3x = 19 + 5y$

$x = \dfrac{19+5y}{3} = 6 + y + \dfrac{1+2y}{3}$ por lo tanto $\dfrac{1+2y}{3}$ tiene que ser un número entero, hagamos $t = \dfrac{1+2y}{3}$ de aquí: $x = 6 + y + t$ (1) y

$$3t = 1 + 2y \Rightarrow 2y = 3t - 1 \Rightarrow y = \frac{3t-1}{2} \Rightarrow y = t + \frac{t-1}{2}$$

y por consiguiente $z = \dfrac{t-1}{2}$ tiene que ser entero y tenemos que: $y = t + z$ (2) y

$$z = \frac{t-1}{2} \Rightarrow 2z = t - 1 \Rightarrow t = 2z + 1$$

sustituyendo t en (1) y (2) tenemos:

$$\begin{cases} y = t + z = 2z + 1 + z = 3z + 1 \\ x = 6 + y + t = 6 + 3z + 1 + 2z + 1 = 5z + 8 \end{cases}$$

y tenemos que:

$$\begin{cases} x = 8 + 5z \\ y = 1 + 3z \end{cases}$$

y para que satisfaga las condiciones z = 0, 1, 2, 3,**...** y los valores de *x* e *y* son:

$$\begin{cases} x = 8 + 5z = 8,.13,.18,.23,\cdots \\ y = 1 + 3z = 1,.4,.7,.10,\cdots \end{cases}$$

El pago se puede efectuar de las siguientes formas:

Se entregan 8 billetes de tres pesos y le devuelven 1 billete de cinco pesos o se entregan 13 billetes de tres pesos y recibe 4 billetes de cinco pesos y así sucesivamente.

Es claro, que teóricamente, este problema tiene infinitas soluciones, pero en la práctica su número es limitado, por cuanto ni el comprador, ni la cajera tienen una cantidad ilimitada de billetes. Así, por ejemplo, si cada uno dispone de 10 billetes, el pago puede efectuarse solo de una forma: Entregando 8 billetes de tres pesos y recibiendo uno de cinco. Como vemos, en la práctica las ecuaciones indeterminadas pueden dar soluciones determinadas como este caso.

922. Sea:

x→ número de sellos de 1 centavo

y→ número de sellos de 4 centavo

z→ número de sellos de 12 centavo

En este caso tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas:

$x + 4y + 12z = 100$ (1)

$\underline{x + y + z = 40 \ (2)}$

restando (1) – (2) tenemos:

$3y + 11z = 60$

despejando y tenemos

$$y = \frac{60 - 11z}{3} = 20 - \frac{11z}{3} = 20 - 11 \cdot \frac{z}{3}$$

$t = \dfrac{z}{3}$ tiene que ser entero y tenemos:

$$\begin{cases} y = 20 - 11t \\ z = 3t \end{cases}$$

sustituyendo *y* y *z* en (2) tenemos:

$x + y + z = 40 \Rightarrow x + 20 - 11t + 3t = 40 \Rightarrow x = 20 + 8t$

como $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $z \geq 0$, entonces $t \geq 0$ y además:

$$20 - 11t \geq 0 \Rightarrow 20 \geq 11t \Rightarrow t \leq \frac{20}{11} \Rightarrow t \leq 1\frac{9}{11}$$

de donde *t* solo puede tomar los valores enteros $t = 0$ y $t = 1$ y los valores de *x, y*, y *z* son:

si $t = 0$	si $t = 1$
$x = 20 + 8 \cdot 0 = 20$	$x = 20 + 8 \cdot 1 = 28$
$y = 20 - 11 \cdot 0 = 20$	$y = 20 - 11 \cdot 1 = 9$
$z = 3 \cdot 0 = 0$	$z = 3 \cdot 1 = 3$

Son posibles estas dos formas, pero como se debe exigir que se compren de los tres sellos entonces la solución es 28 sellos de 1 centavo, 9 sellos de 4 centavos y 3 sellos de 12 centavos.

923. Si

x→ número de mangos compradas

y→ número de naranjas compradas

z→ número de ciruelas compradas

tenemos que:

$x + y + z = 100$ (1)

$\underline{50x + 10y + z = 500}$ (2)

restando (2) – (1) tenemos:

$49x - 9y = 400$

despejando y tenemos:

$$y = \frac{400 - 49x}{9} = 44 - 5x + \frac{4(1 - x)}{9}$$

como $t = \frac{1-x}{9}$ tiene que ser entero no negativo.

$y = 44 - 5x + 4t$ (3)

$9t = 1 - x$

$x = 1 - 9t$ (4)

sustituyendo (4) en (3)

$y = 44 - 5(1 - 9t) + 4t$

$y = 39 + 49t$

de las desigualdades:

$1 - 9t \geq 0$ y $39 + 49t \geq 0$

$9t \leq 1$ y $49t \geq -39$

$t \leq \frac{1}{9}$ y $t \geq \frac{-39}{49}$

$\frac{-39}{49} \leq t \leq \frac{1}{9}$ (5) y por consiguiente $t = 0$ (único entero no negativo que satisface la inecuación (5))

y por tanto tenemos:

$$\begin{cases} x = 1 - 9 \cdot 0 = 1 \\ y = 39 + 49 \cdot 0 = 39 \end{cases}$$

y sustituyendo *x* e *y* en (1) tenemos:

$1 + 39 + z = 100 \Rightarrow z = 60$

Se compran 1 mango, 39 naranjas y 60 ciruelas.

924. Sea:

antes del medio día

x→ número de pollos vendidos por primera hermana.

y→ número de pollos vendidos por segunda hermana

z→ número de pollos vendidos por tercera hermana

después del medio día:

$10 - x$→ número de pollos vendidos por primera hermana.

$16 - y$→ número de pollos vendidos por segunda hermana

$26 - z$→ número de pollos vendidos por tercera hermana

m → precio de los pollos antes del medio día.

n → precio de los pollos después del medio día.

De aquí se tiene que:

La primera hermana obtuvo:

$mx + n(10 - x) = 35$

la segunda:

$my + n(16 - y) = 35$

la tercera:

$mz + n(26 - z) = 35$

transformando las ecuaciones tenemos

$(m - n)x + 10n = 35$ (1)

$(m - n)y + 16n = 35$ (2)

$(m - n)z + 26n = 35$ (3)

restando (3) – (1) tenemos:

$(m - n)(z - x) + 16n = 0$ (4)

restando (3) – (2) tenemos:

$(m - n)(z - y) + 10n = 0$ (5)

ordenando (4) y (5) obtenemos:

$(m - n)(x - z) = 16n$ (6)

$(m - n)(y - z) = 10n$ (7)

dividiendo (6) por (7)

$\frac{x-z}{y-z}=\frac{8}{5}$ ó $\frac{x-z}{8}=\frac{y-z}{5}$

para que se cumpla esa igualdad es preciso que $x-z$ se divida por 8 y $y-z$ por 5, o sea:

$\frac{x-z}{8}=\frac{y-z}{5}=t$ de donde:

$x-z=8t \quad x=8t+z$ (8)

$y-z=5t \quad y=5t+z$ (9)

Como *t* es entero positivo y $x>z$ (para que la primera hermana pueda conseguir tanto dinero como la tercera). Y como $x<10$ entonces $z+8t<10$ por tanto esto solo es posible cuando *z = 1* y *t = 1* sustituyendo estos valores en (8) y (9) tenemos: $x=1+8\cdot 1=9$ y $y=1+5\cdot 1=6$

y sustituyendo estos en las ecuaciones

$mx+n(10-x)=35 \Rightarrow 9m+n=35$ (10)

$my+n(16-y)=35 \Rightarrow 6m+10n=35$ (11)

$mz+n(26-z)=35 \Rightarrow m+25n=35$ (12)

$$9m+n=35$$
$$\underline{6m+10n=35}$$
$$18m+2n=70$$
$$\underline{-18m-30n=-105}$$
$$-28n=-35$$
$$n=\frac{35}{28}=1\frac{7}{28}=1\frac{1}{4}$$

$$m+25n=35$$
$$m=35-25\cdot\frac{35}{28}$$
$$m=\frac{35(28-25)}{28}$$
$$m=\frac{105}{28}=3\frac{21}{28}=3\frac{3}{4}$$

Los pollos hasta el medio día fueron vendidos a 3 pesos y 75 centavos ($3\frac{3}{4}$ pesos) y después del medio día a 1 peso con 25 centavos ($1\frac{1}{4}$ pesos).

925. Si tenemos que:

$x \rightarrow$ número mayor

$y \rightarrow$ número menor

$$(x+y)+(x-y)+x\cdot y+\frac{x}{y}=243$$
$$xy+y^2+xy-y^2+xy^2+x=243y$$
$$xy^2+2xy+x=243y$$
$$x(y^2+2x+1)=243y$$
$$x(y+1)^2=243y$$
$$x=\frac{243y}{(y+1)^2}$$

Para que sea entero el denominador $(y+1)^2$ tiene que ser un divisor de 243 (pues *y* no tiene factores comunes con *y+1*). Sabiendo que 243=3^5, se deduce que 243 es divisible solo por los siguientes cuadrados: 1, 3^2, 9^2. Puesto que *y* debe ser un número positivo resulta que *y* es 8 ó 2. Entonces *x* será igual a:

$$x=\frac{243\cdot 8}{9^2}=24$$

$$x=\frac{243\cdot 2}{3^2}=54$$

R/ Los números buscados son: 24 y 8 ó 54 y 2.

926. Sea:

$x \rightarrow$ número menor

$x+1 \rightarrow$ número del medio

$x+2 \rightarrow$ número mayor

$$(x+1)^2 = x(x+2)+1$$
$$x^2+2x+1 = x^2+2x+1$$
$$0=0$$

Esto muestra que la igualdad formulada por nosotros es una identidad efectiva para cualesquiera tres números consecutivos que cumplan dicha propiedad.

Si lo expresamos como:

$x-1 \rightarrow$ número menor

$x \rightarrow$ número del medio

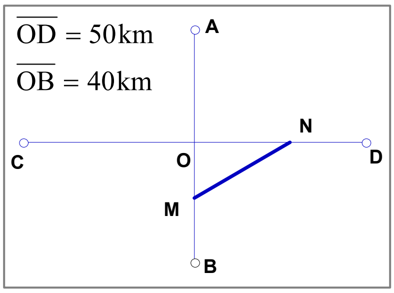
$x+1 \rightarrow$ número mayor

tenemos:

$$x^2 = (x-1)(x+1)+1$$
$$x^2-1 = (x-1)(x+1)$$

Que es una identidad evidente.

927. Supongamos que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son dos líneas férreas que se cruzan (figura). La estación B se encuentra a 40km del cruce O y la estación D a 50km. Admitiremos que al cabo de *x* minutos los trenes se encuentran a la distancia más próxima entre sí ($\overline{MN}=m$). El tren que sale de B hace el recorrido $\overline{BM}=0{,}8x$ ya que en un minuto recorre $800\text{m}=0{,}8\text{km}$. Por consiguiente $\overline{OM} = 40-0{,}8x$.



Del mismo modo hallamos $\overline{ON} = 50-0{,}6x$ (en un minuto recorre $600m = 0{,}6km$). Según el Teorema de Pitágoras tenemos:

$$\overline{MN} = m = \sqrt{\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2}$$
$$m = \sqrt{(40-0{,}8x)^2 + (50-0{,}6x)^2}$$
$$m^2 = x^2 - 124x + 4100$$
$$x^2 - 124x + 4100 - m^2 = 0$$
$$a=1,\ b=-124,\ \ c = 4100-m^2.$$

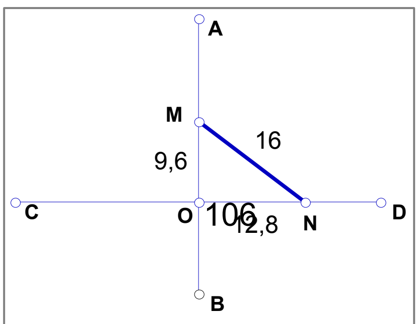
$$D = b^2-4ac$$
$$= 124^2 - 4\cdot 1(4100-m^2)$$
$$= 4^2\cdot 31^2 - 4\cdot 4\cdot 1025 + 4m^2$$
$$= 16(961-1025)+4m^2$$
$$= 4(m^2-256)$$

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x_{1,2} = \frac{124\pm\sqrt{4(m^2-256)}}{2}$$
$$x_{1,2} = 62\pm\sqrt{m^2-256}$$

Ya que *x* es el número de minutos transcurridos entonces $m^2-256\geq 0$ y el valor mínimo de *m* será cuando esa expresión sea igual a cero, de aquí que:

$$m^2-256=0$$
$$(m+16)(m-16)=0$$
$$m_1 = 16$$
$$m_2 = -16 \text{ imposible.}$$

Es evidente que *m* no puede ser menor que 16, de lo contrario *x* se convertiría en una raíz imaginaria y si $m^2-256=0$ entonces $x=62$. De esta forma las locomotoras llegarán a su punto de mayor aproximación al cabo de 62 minutos



y la distancia que los separa será de 16km.

Determinemos dónde se encontrará cada una de las locomotoras en el momento de mayor aproximación.

Al buscar la distancia $\overline{OM}$, tendremos que es igual a $40 - 62 \cdot 0{,}8 = -9{,}6$. El signo negativo indica que la primera locomotora habrá rebasado el cruce en 9,6km. La distancia $\overline{ON}$ será: $50 - 62 \cdot 0{,}6 = 12{,}8$.

Por tanto a la segunda locomotora le faltan 12,8km para llegar al cruce y como se muestra en la figura, la situación no es como la imaginábamos al principio.

928. Sea

$x \rightarrow$ cantidad de reserva de comida en decalitros (DL)

$y \rightarrow$ cantidad de semanas

Como el alimento se calculó para 31 gallinas a razón de 1DL por cabeza, a la semana resulta que $x = 31y$.

El consumo fue:

Primera semana: 31 DL

Segunda semana: (31-1) DL

Tercera semana: (31-2) DL

...

y-ésima semana: $(31 - (y - 1))\,\mathrm{DL} = (31 - y + 1)\,\mathrm{DL}$

...

2*y*-ésima semana: $(31 - (2y - 1))\,\mathrm{DL} = (31 - 2y + 1)\,\mathrm{DL}$

Por tanto la reserva sería de:

$x = 31y = 31 + 30 + 29 + \cdots + (31 - y + 1) + \cdots + (31 - 2y + 1)$. La suma de 2*y* miembros de la progresión donde el primero es 31 y el último $(31 - 2y + 1)$ es igual a:

$$31y = \frac{(31 + 31 - 2y + 1)2y}{2}$$

$31y = (63 - 2y)y$ dividiendo por y pues $y \neq 0$ se obtiene

$$31 = 63 - 2y \Rightarrow 2y = 63 - 31 \Rightarrow y = 16$$

y entonces

$$x = 31y \Rightarrow x = 31 \cdot 16 \Rightarrow x = 496$$

R/ Fueron preparados 496 DL de comida para 16 semanas.

929. Supongamos que el último miembro de la brigada trabajó *x* horas; el primero habrá trabajado 11 horas. Si el número de miembros de la brigada es *y*, el número global de horas trabajadas se determina como la suma de y miembros de una progresión decreciente, donde el primer término es 11*x* y el último *x*:

$$S = \frac{(11x + x)y}{2} = \frac{12xy}{2} = 6xy$$

Como la brigada de *y* personas trabajando simultáneamente hubieran terminado la zanja en 24 horas, por lo que para realizar ese trabajo hace falta $24y$ horas de trabajo, por tanto:

$$6xy = 24y \Rightarrow 6x = 24 \Rightarrow x = 4$$

Por lo tanto el último miembro de la brigada trabajó 4 horas.

Nota: Hemos contestado a la pregunta del problema, pero si quisiéramos saber el número de obreros con que cuenta la brigada no podemos determinarlo, aunque en la ecuación figuren estos con la variable *y*, pues para resolver esta ecuación no se cuenta con los datos suficientes.

930. Como cada herradura necesita 6 clavos, el hombre tiene que pagar por los 24 clavos:

$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{24-3}$ centavos.

Cuya suma es igual a:

$$\frac{2^{21} \cdot 2 - \frac{1}{4}}{2 - 1} = 2^{22} - \frac{1}{4} = 4194304 - \frac{1}{4} = 4194303\frac{3}{4} \text{ centavos.}$$

Es decir cerca de $42000. En tales condiciones vale la pena entregar el caballo gratis.

931. Sea: $x \rightarrow$ cantidad de heridas recibidas

655 pesos 35 centavos = 65535 centavos

$65535 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{x-1}$ esa serie geométrica se suma como:

$$65535 = \frac{2^{x-1} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^x - 1$$

$65535 + 1 = 2^x \quad 2^x = 2^{16} \quad x = 16$ Con este "*generoso*" sistema de recompensa, el soldado debía ser herido 16 veces, quedando además vivo, para obtener 655 pesos y 35 centavos.

932. Sea: $x \to$ cantidad de páginas de cuatro cifras

$$1 \cdot 9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + 4x = 6869 \qquad 4x = 3980$$

$$2889 + 4x = 6869 \qquad x = 995$$

$9 + 90 + 900 + 995 = 1994$

R/ El libro tiene 1994 páginas.

933. Fecha de nacimiento $\overline{abcd}$

Edad: $a + b + c + d$ en 1987

$1887 - \overline{abcd} = a + b + c + d$ Pero necesariamente $\mathrm{a} = 1$ y $\mathrm{b} = 8$

$$1887 - \overline{18cd} = 1 + 8 + c + d \qquad 87 - 11c - 2d = 9$$

$$1887 - 1800 - 10c - d = 9 + c + d \qquad 11c + 2d = 78$$

Para que esto se cumpla c tiene que ser 6 ó 7, analicemos estos casos:

Si $c = 6$ ó $c = 7$

$$11 \cdot 6 + 2d = 78 \qquad 11 \cdot 7 + 2d = 78$$

$$66 + 2d = 78 \qquad 2d = 78 - 77$$

$$33 + d = 39 \qquad d = \frac{1}{2} \text{ imposible}$$

$$d = 6 \text{ posible solución}$$

R/ Esa persona nació en 1866 y su edad es de 21 años.

934. En este tipo de ejercicio se puede proceder de atrás hacia delante. El mayor recibe 3 (4-1) caramelos (mitad menos uno), el mediano recibe la otra mitad más uno (4+1) es decir, 5 caramelos, en total hasta aquí tenemos 8 (9-1) caramelos (que es la mitad menos uno), el pequeño recibe la otra mitad más uno, 10 (9+1) caramelos, y en total son 10+8=18 caramelos. Repartió 18 caramelos, le dio 10 al menor, 5 al mediano y 3 al mayor.

Otra vía

$x \to$ cantidad de caramelos.

Da al menor $\frac{x}{2} + 1 = \frac{x+2}{2}$ queda $x - \frac{x+2}{2} = \frac{x-2}{2}$

Mediano $\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right) + 1 = \frac{x+2}{4}$ queda $\frac{x-2}{2} - \frac{x+2}{4} = \frac{x-6}{4}$

Da al mayor $\frac{x-6}{4} = 3 \Rightarrow x - 6 = 12 \Rightarrow x = 18$

R/ Repartió 18 caramelos, le dio 10 al menor, 5 al mediano y 3 al mayor.

935. Dada

Rectángulo	original	modificado
ancho	x	$x + 4$
largo	$x + 2$	$x + 2 + 4 = x + 6$
área	$x(x+2)$	$(x+4)(x+6)$

$$(x+4)(x+6) - x(x+2) = 72 \qquad 8x = 48$$

$$x^2 + 10x + 24 - x^2 = 72 \qquad x = 6$$

El ancho es 6cm y el largo 8cm.

936. Aquí también se puede proceder de atrás hacia delante, por tanto se emplea 1 camión para transportar las cebollas, para pepinos 3 (uno más doble de uno) y hasta ahora se han empleado 4 camiones, por lo que para ajíes se emplean 12 (cuatro más doble de cuatro) y van 16 camones,

por tanto para tomate son 48 (dieciséis más doble de dieciséis) y se puede comprobar que en total son 64 (1+3+12+48) camiones.

Otra vía:

$x \rightarrow$ cantidad de camiones que se necesitan.

Para tomate: $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{3x}{4}$ quedan: $x-\frac{3x}{4}=\frac{x}{4}$

Ajíes: $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}-\frac{x}{8}\right)=\frac{3x}{16}$ quedan: $\frac{x}{4}-\frac{3x}{16}=\frac{x}{16}$

Pepinos: $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{16}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{16}-\frac{x}{32}\right)=\frac{3x}{64}$ queda: $\frac{x}{16}-\frac{3x}{64}=\frac{x}{64}$

Cebolla: $1=\frac{x}{64} \Rightarrow x=64$

R/ Se utilizaron 48 camiones para tomate, 12 para ajíes, 3 para pepino y 1 para cebolla y en total se necesitaron 64 camiones.

937. Sea: $x \rightarrow$ cantidad de matas que tiene.

Si toma $x=a^2$ le sobran 16 o sea $x=a^2+16$

Si toma $x=(a+1)^2$ le faltan 11 o sea $x=(a+1)^2-11$

Pero esto significa la misma cantidad y tenemos:

$a^2+16=(a+1)^2-11$ $\qquad 2a=26$

$a^2+16=a^2+2a+1-11$ $\qquad a=13$

y la cantidad de matas es

$x=(a+1)^2-11$ $\qquad x=196-11$

$x=(13+1)^2-11$ $\qquad x=185$

R/ tiene 185 matas.

938. Sea $x \rightarrow$ Edad con que murió

vivió en España: $\frac{1}{5}x$ resto: $x-\frac{x}{5}=\frac{4x}{5}$

vivió en Cuba: $\frac{2}{3}\left(\frac{4x}{5}\right)=\frac{8x}{15}$

vivió en Estados Unidos: 17 años

vivió en Francia: $x-\frac{24x}{25}=\frac{x}{25}$

En Cuba, España y Francia vivió: $\frac{8x}{15}+\frac{x}{5}+\frac{x}{25}=\frac{58x}{75}$

$$x-\frac{58x}{75}=17$$

Por tanto: $\frac{17x}{75}=17$ $\qquad \frac{x}{25}=\frac{75}{25}=3$

$$x=75$$

R/ Vivió en Francia 3 años y murió a los 75 años.

939. $x \rightarrow$ cantidad de refrescos.

Annia: $1+\frac{x-1}{3}=\frac{x+2}{3}$ Queda: $x-\frac{x+2}{3}=\frac{2x-2}{3}$

Beatriz: $2+\frac{1}{3}\left(\frac{2x-2}{3}-2\right)=\frac{2x+10}{9}$

Queda: $\frac{2x-2}{3}-\frac{2x+10}{9}=\frac{4x-16}{9}$

Carlos: $\frac{1}{3}\left(\frac{4x-16}{9}\right)=\frac{4x-16}{27}$

$\frac{x+2}{3}+\frac{2x+10}{9}+\frac{4x-16}{27}=42$

$9x+18+6x+30+4x-16=42\cdot 27$ $\qquad x=\frac{1102}{19}$

$19x+32=1134$ $\qquad x=58$

R/ En la fuente había inicialmente 58 refrescos.

940. $x \rightarrow$ cantidad de libros

Álgebra: $\frac{2}{7}x$ $\qquad$ Resto: $x-\frac{2}{7}x=\frac{5x}{7}$

Geometría: $\frac{1}{3}\cdot\frac{5x}{7}=\frac{5x}{21}$ $\qquad$ Resto: $\frac{5x}{7}-\frac{5x}{21}=\frac{10x}{21}$

Análisis: $\frac{3}{5}\cdot\frac{10x}{21}=\frac{2x}{7}$ $\qquad$ Resto: $\frac{10x}{21}-\frac{2x}{7}=\frac{4x}{21}$

Matemática Elemental: $\frac{4x}{21}=36 \Rightarrow x=189$

R/ Tiene 189 libros: 54 de Álgebra, 45 de Geometría, 54 de Análisis y 36 de Matemática Elemental.

941. $\overline{abc} \rightarrow$ es el número

unidades: $c=x+5$

decenas: $b=x+1$

centenas: $a=x$

$x+5=2(x+1+x)$

$x+5=4x+2$ $\qquad b=x+1=2$

$x=1$ $\qquad c=x+5=6$ $\qquad$ R/ El número es 126.

942. $x \rightarrow$ cantidad de arañas (8 patas).

$y \rightarrow$ cantidad de escarabajos (6 patas).

$$\left.\begin{array}{l} x+y=8 \\ 8x+6y=54 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} -6x-6y=-48 \\ 8x+6y=54 \end{array}\right\}$$

$2x=6$ $\qquad y=8-x$

$x=3$ $\qquad y=5$

R/ El pionero tenía 3 arañas y 5 escarabajos.

943. $\overline{abc} \rightarrow$ el número

centena $a=x$-1

decenas $b=x$

unidades $c=x+1$

$\overline{abc}=8\overline{bc}+8$

$100(x-1)+10x+x+1=8(10x+x+1)+8$ $\qquad x-1=4$

$111x-99=88x+16$ $\qquad x=5$

$23x=115$ $\qquad x+1=6$

$x=5$

R/ El número es 456.

944. Sea

$x \rightarrow$ bolsos.

$y \rightarrow$ guayabas

$$\left.\begin{aligned}12(x+12)&=y\\ 36(x-6)&=y\end{aligned}\right\}$$

$$12x+144=36x-216$$

$$24x=360$$

$$x=15$$

$$12(15+12)=324$$

R/ Tengo 15 bolsos y 324 guayabas.

945. Dada

	Edad actual	Dentro de *x* años
Padre	40	$40+x$
Primer hijo	6	$6+x$
Segundo hijo	8	$8+x$
Los dos juntos	14	$14+2x=52$

$14+2x=52 \Rightarrow 2x=38 \Rightarrow x=19$ $\qquad 40+x=40+19=59$

R/ La edad del padre será de 59 años.

946. La fracción es $\dfrac{x}{x+5}$ y el recíproco $\dfrac{x+5}{x}$

$$\frac{x+35}{x+5}=\frac{x+5}{x}$$

$$(x+5)^2=x(x+35)$$

$$x^2+10x+25=x^2+35x$$

$$25x=25$$

$$x=1$$

$$\frac{x}{x+5}=\frac{1}{6}$$

R/ La fracción es $\dfrac{1}{6}$.

947. $\overline{ab}\rightarrow$ el número

$$\overline{ab}=3(a+b)\ (1)$$

$$(a+b)^2=3\overline{ab}\ (2)$$

De (1) tenemos

$$10a+b=3a+3b$$

$$10a-3a=3b-b$$

$$2b=7a$$

$$b=\frac{7a}{2}\ (3)$$

De (2) tenemos

$$a^2+2ab+b^2=3\cdot(10a+b)$$

$$a^2+2a\cdot\frac{7a}{2}+\frac{49a^2}{4}=30a+3\cdot\frac{7a}{2}$$

$$81a^2-162a=0$$

$$a-2=0$$

$$a=2\ (4)$$

De (4) y (3) tenemos

$$b=\frac{7}{2}\cdot 2=7$$

R/ El número es 27.

948. $x\rightarrow$ cantidad de galletas.

Al del lado: $\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x+1}{2}$ Queda: $x-\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{x-1}{2}$

Al delante: $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x+1}{4}$ Queda: $\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{x-3}{4}$

Al de atrás: $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-3}{4}\right)+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x+1}{8}$ Queda: $\dfrac{x-3}{4}-\dfrac{x+1}{8}=\dfrac{x-7}{8}$

$$\frac{x-7}{8}=1\Rightarrow x-7=8\Rightarrow x=15$$

R/ En el cartucho había 15 galletas.

949. $x\rightarrow$ cantidad de billetes \$5

$x \to$ cantidad de billetes \$20

$26 - 2x \to$ cantidad de billetes \$10

$$5x + 10(26 - 2x) + 20x = 280 \qquad 26 - 2x =$$
$$5x = 20 \qquad = 26 - 2 \cdot 4$$
$$x = 4 \qquad = 18$$

R/ Hay 4 billetes de \$5, 4 de \$20 y 18 de \$10

950. $\overline{ab} \to$ el número

$a + 2 \to$ cifra de las decenas más dos

$b + 2 \to$ cifra de las unidades más dos

$$\begin{cases} a + b = 7 \Rightarrow b = 7 - a \\ \overline{(a+2)(b+2)} + 3 = 2\overline{ab} \end{cases}$$

$$10a + 20 + b + 2 + 3 = 20a + 2b \qquad b = 7 - a$$
$$18a - 9a = 32 - 14 \qquad b = 7 - 2$$
$$9a = 18 \qquad b = 5$$
$$a = 2$$

R/ El número es 25.

951. $x \to$ cantidad de naranjas en la cesta.

A Juan: $\frac{x}{2} + 2 = \frac{x+4}{2}$ Queda: $x - \frac{x+4}{2} = \frac{x-4}{2}$

A Pedro: $\frac{1}{2}\left(\frac{x+4}{2}\right) + 3 = \frac{x+8}{4}$ Queda: $\frac{x-4}{2} - \frac{x+8}{4} = \frac{x-16}{4}$

A Enrique: $\frac{x-16}{4} = 4$ $\qquad x - 16 = 16 \Rightarrow x = 32$

R/ En la cesta había 32 naranjas.

952. $x \to$ cosecha prevista.

$\frac{4x}{5} \to$ lo que recoge $\qquad \frac{1}{20} \cdot \frac{4x}{5} = \frac{x}{25} \to$ para semillas

$\frac{1}{400} \cdot \frac{4x}{5} = \frac{x}{500} \to$ para consumo

$\frac{4x}{5} - \frac{x}{25} - \frac{x}{500} = \frac{379x}{500} \to$ vende

$$\frac{379x}{500} = 37900 \qquad \frac{50000}{500} = 100kg$$
$$x = 50000$$

R/ Para su consumo reservó 100kg y la cosecha prevista era de 5000kg.

953. $x \to$ precio del lapicero

$y \to$ precio de la libreta

$$x + y = 85$$
$$\underline{x = y + 75} \qquad x = y + 75$$
$$y + 75 + y = 85 \qquad x = 5 + 75$$
$$2y = 10 \qquad x = 80$$
$$y = 5$$

R/ El lapicero cuesta 80 centavos y la libreta 5 centavos.

954. $x \to$ cantidad de lecturas

$\frac{2x}{9} \to$ El primer día. $\qquad$ queda: $x - \frac{2x}{9} = \frac{7x}{9}$

Segundo día: $\frac{5}{14}\cdot\frac{7x}{9}=\frac{5x}{18}$ queda: $\frac{7x}{9}-\frac{5x}{18}=\frac{x}{2}$

Tercer día: $\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{2}=\frac{x}{3}$ queda: $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=\frac{x}{6}$ $\frac{x}{6}=30$

$x=180$

R/ Debe repasar 180 lecturas.

955. $x\rightarrow$ alumnos de tercero

$\frac{4x}{5}\rightarrow$ alumnos de cuarto

$x-3=\frac{4x}{5}+3$

$\frac{x}{5}=6\Rightarrow x=30$

$\frac{4x}{5}=\frac{4\cdot 30}{5}=24$

R/ En tercero hay 30 estudiantes y en cuarto 24.

956. $x\rightarrow$ faltan por transcurrir

$\frac{3x}{5}\rightarrow$ transcurridos

$x+\frac{3x}{5}=24$

$\frac{8x}{5}=24\Rightarrow x=15$

$\frac{3x}{5}=\frac{3\cdot 15}{5}=9$

R/ Han transcurrido 9 horas del día, por lo tanto son las 9 am.

957. $x\rightarrow$ cantidad de palomas

$x+x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+1=100$

$\frac{11x}{4}=99\Rightarrow x=36$

R/ Eran 36 palomas.

958. $x\rightarrow$ dinero que tenía

$\frac{x}{4}\rightarrow$ lo que gastó $\frac{3x}{4}\rightarrow$ lo que le quedaba

$\frac{3x}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3x}{4}=x+25$

$\frac{x}{8}=25\Rightarrow x=200$

R/ Tenía \$200.

959. $x\rightarrow$ cantidad de ejercicios de tarea

$x=\frac{4x}{9}+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}+3$

$\frac{x}{18}=3\Rightarrow x=54$

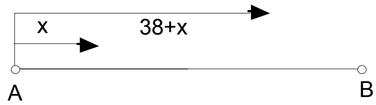
R/ Tenía 54 ejercicios de tarea.

960. $x\rightarrow$ distancia recorrida por hombre a caballo

$x+38\rightarrow$ distancia recorrida en auto

$V_1\rightarrow$ velocidad del hombre a caballo

$20V_1\rightarrow$ velocidad del auto



$t_1=t_2$

$\frac{x}{V_1}=\frac{38+x}{20V_1}$

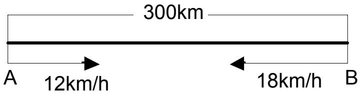
$20x=38+x\Rightarrow x=2$

$x+38=2+38=40$

R/ El segundo ha recorrido 40km.

961. Queda claro que la llave vierte 11 litros cuando por el desagüe sale 1 litro, o sea vierte 10 litros más, para llenar el tanque hasta la mitad son 500 litros que tiene que verter la llave pero por el desagüe salen 50 litros que la llave debe verter, entonces la llave vierte 550 litros para llenar el tanque hasta la mitad.

962. Dado



$12+18=30$ km se acercan por hora

$\frac{300}{30}=10$ horas necesitan para encontrarse

$12\cdot 10=120$ km se encuentran de A.

R/ Se encontrarán a 120km de A y demoran 10 horas en encontrarse.

963. $x \rightarrow$ cantidad de agua que contiene la mezcla.

40 g ------ 20%

$x+40\text{ g}$ ------ 100%

$x+40=\frac{40\cdot 100}{20}$

$x=160$

R/ La mezcla tenía 160g de agua.

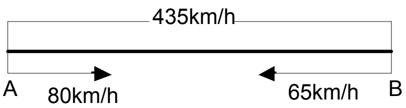
964. Dado

	Minutos que demora	Parte que hace en cada minuto
1era llave	28	$\frac{1}{28}$
2da llave	42	$\frac{1}{42}$
Las dos juntas	x	$\frac{1}{x}$

$\frac{1}{28}+\frac{1}{42}=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{84}{5}\Rightarrow x=16{,}8$

R/ El tanque se llenará en 16 minutos y 48 segundos.

965. Dado



$80+65=145km$ que se acercan por horas.

$\frac{435}{145}=3h$ necesitan para encontrarse.

$65\cdot 3=195km$ se encuentran de B.

R/ Se encontrarán a 195km de B y demoran $3h$ en encontrarse.

966. $x \rightarrow$ cantidad de toneladas del tipo A.

$70-x \rightarrow$ cantidad de toneladas del tipo B.

$5\%x+40\%(70-x)=30\%\cdot 70$

$50x+2800-40x=2100$

$x=20$

$70-x=70-20=50$

R/ Se necesitan 20 toneladas del tipo A y 50 del tipo B.

967. Analizando la siguiente tabla:

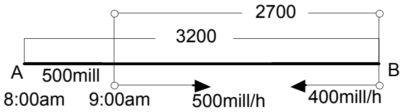
	Tiempo que necesitan	Cantidad que vierten en 1h

1^{era} llave	30	$\frac{1}{30}$
2^{da} llave	36	$\frac{1}{36}$
3^{era} llave	20	$\frac{1}{20}$
Las tres juntas	*x*	$\frac{1}{x}$

$$\frac{1}{30}+\frac{1}{36}+\frac{1}{20}=\frac{1}{x}\Rightarrow 6x+5x+9x=180\Rightarrow x=9$$

R/ Abriendo las tres simultáneamente se necesitan 9 horas.

968.



$500+400=900$ millas se acercan en 1 hora.

$\frac{2700}{900}=3h$ necesitan para encontrarse.

$400\cdot 3=1200$ millas se encuentran de B

R/ Se encuentran a 1200 millas de B a las 12 meridiano.

969. $x\rightarrow$ cantidad de agua destilada.

$5\%\cdot 80=2\%(80+x)$

$5\cdot 80=2(80+x)$

$x=\frac{240}{2}$

$x=120$

R/ será necesario mezclar 120kg de agua destilada

970.

	Tiempo que necesitan	Cantidad que vierten en 1h
1^{era} llave	4	$\frac{1}{4}$
2^{da} llave	2	$\frac{1}{2}$
desagüe	6	$\frac{1}{6}$
Las tres juntas	*x*	$\frac{1}{x}$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{x}$

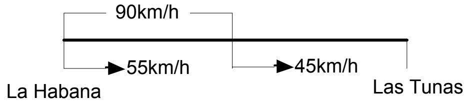
$3x+6x-2x=12$

$x=\frac{12}{7}$

$x=1\frac{5}{7}h$

R/ La piscina se llena en $1\frac{5}{7}h$

971.



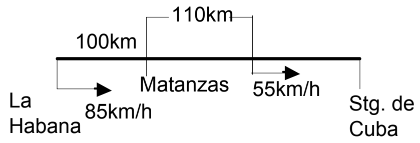
$55-45=10km$ se acerca el tren de pasajero al de carga.

$\frac{90}{10}=9h$ para alcanzar el de pasajero al de carga

$55 \cdot 9 = 495km$ se encuentran de la Habana.

R/ el tren de pasajero encontrará a de carga a 495km de la Habana.

972.



$100 + 110 = 210km$ de diferencia

$85 - 55 = 30km$ se acerca cada hora

$\frac{210}{30} = 7h$ para encontrarse.

$85 \cdot 7 - 100 = 595 - 100 = 495$ km de Matanzas se encuentran.

R/ Se encontraran a 495km de Matanzas a las 10 pm.

973. $S_I \rightarrow$ Distancia de ida

$25km/h \rightarrow$ Velocidad de ida

$x \rightarrow$ tiempo de ida

$S_R \rightarrow$ Distancia de regreso

$5km/h \rightarrow$ Velocidad de regreso.

$4 - x \rightarrow$ tiempo de regreso

$S_I = S_R$ $\quad 30x = 20$

$25x = 5(4 - x)$ $\quad x = \frac{2}{3}$

$25x = 20 - 5x$

$$S_I = S_R = 25 \cdot \frac{2}{3} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$$

R/ Puede recorrer $16\frac{2}{3}$ km.

974. $x \rightarrow$ cantidad de agua contenida en el tanque.

$2000 - x \rightarrow$ cantidad de agua que falta para llenar el tanque.

$$x = \frac{2}{3}(2000 - x)$$

$$\frac{3x}{2} + x = 2000 \Rightarrow x = 800$$

R/ En el tanque hay 800 litros de agua.

975. Debe quedar claro que un metro cúbico de capacidad equivale a tener capacidad para 1000 litros y como el desagüe vacía a razón de 20 litros por minuto, el solo demoraría 50 minutos para vaciar el deposito, pero si utilizamos 5 desagües a la misma vez vaciaran 100 litros por cada minuto y como la capacidad es 1000 litros necesitaran 10 minutos, luego se necesitan 5 desagües iguales al anterior para vaciar el deposito en 10 minutos.

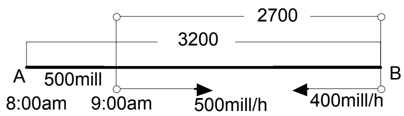
976. Sea *x* la cantidad que tenemos que remplazar

$20\%(16 - x) + x = 25\% \cdot 16$ $\quad \frac{4x}{5} = \frac{4}{5}$

$\frac{20}{100}(16 - x) + x = \frac{25}{100} \cdot 16$ $\quad x = 1$

R/ Hay que remplazar 1 litro.

977. Sea:



$500 + 400 = 900$ millas se acercan en 1 hora.

$\frac{2700}{900}=3h$ necesitan para encontrarse.

$400\cdot 3=1200$ millas se encuentran de Georgetown

R/ Se encuentran a 1200 millas de Georgetown a las 12 meridiano.

978. Sea $x\rightarrow$ longitud de la cuesta.

$t_1 \rightarrow$ tiempo de subida.

$4km/h \rightarrow$ velocidad de subida.

$t_2 \rightarrow$ tiempo de bajada.

$6km/h \rightarrow$ velocidad de bajada.

$t_1+t_2=1{,}5h$

$\frac{x}{4}+\frac{x}{6}=\frac{3}{2}$

$x=\frac{18}{5}$

$x=3{,}6km$

R/ La cuesta tiene 3,6km de longitud.

979. Como la primera llave puede llenar el tanque en 20 minutos, en 5 minutos llenará $\frac{1}{4}$ del tanque, por lo que faltan por llenar $\frac{3}{4}$ del tanque: en un minuto la primera llena $\frac{1}{20}$ del tanque y la segunda $\frac{1}{x}$; siendo *x* el tiempo que tarda la segunda en llenar el tanque. Como las dos juntas llenan $\frac{3}{4}$ del tanque en tres minutos podemos plantear:

$3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{20}\right)=\frac{3}{4}$

$\frac{20+x}{20x}=\frac{1}{4}$

$x=\frac{80}{16}$

$x=5\ \text{minutos}$

R/ La segunda llave puede llenar el tanque en 5 minutos.

980. El tanque está hasta la mitad de su contenido, o sea tiene 700 litros de agua. Desde las 7:00 am hasta las 7:10 am la llave vertió $50\cdot 10=500$ litros. Necesitamos saber qué tiempo estuvo abierta la llave a partir de las 7:10 am hasta que el tanque quedó vacío.
Sea *x* el tiempo que estuvo abierta la llave a partir de las 7:00 am.

$700+500+50x-80x=0$

$30x=1200 \Rightarrow x=40\ \text{minutos}$

La llave estuvo abierta $10+40=50$ minutos, vertiendo a razón de $50l/\min$ por lo que vertió $50\cdot 50=2500$ litros en total.

R/ La llave vertió 2500 litros hasta que el tanque quedó vacío.

981. Sea $x\rightarrow$ peso en kg del cobre.

$24 - x\rightarrow$ peso en kg del zinc.

$\frac{100}{7}\%=\frac{1}{7}$

$\frac{100}{9}\%=\frac{1}{9}$

$\frac{1}{9}x+\frac{1}{7}(24-x)=\frac{26}{9}$

$7x+216-9x=182$

$2x=34$

$x=17\ \text{kg}$

$24-17=7\ \text{kg}$

R/ En la aleación hay 17 kg de cobre y 7 kg de zinc.

982. Sea $x\rightarrow$ kg que se necesitan de la primera aleación.

$8 - x\rightarrow$ kg que se necesitan de la segunda aleación.

Como en la primera aleación el oro y la plata están en la razón 2:3, entonces esta tiene $\frac{2x}{5}$ kg de oro y $\frac{3x}{5}$ kg de plata. En la segunda aleación el oro y la plata están en la razón 3:7, entonces esta tiene $\frac{3}{10}(8-x)$ kg de oro y $\frac{7}{10}(8-x)$ kg de plata. Como se pide que la nueva aleación esté en la razón de 5 de oro a 11 de plata, tendrá $\frac{5}{16}\cdot 8$ kg de oro y $\frac{11}{16}\cdot 8$ kg de plata, y para el oro tendremos la siguiente ecuación:

$$\frac{2x}{5}+\frac{3}{10}(8-x)=\frac{5\cdot 8}{16} \Rightarrow 4x+24-3x=25 \Rightarrow x=1\,\text{kg} \qquad 8-x=8-1=7\,\text{kg}$$

En la primera hay $\frac{2}{5}\cdot 1=0{,}4\,\text{kg}$ de oro y $\frac{3}{5}\cdot 1=0{,}6\,\text{kg}$ de plata, en la segunda hay $\frac{3}{10}\cdot 7=2{,}1\,\text{kg}$ de oro y $\frac{7}{10}\cdot 7=4{,}9\,\text{kg}$ de plata; la nueva aleación tiene $0{,}4+2{,}1=2{,}5$ kg de oro y $0{,}6+4{,}9=5{,}5$ kg de plata y $\frac{2{,}5}{5{,}5}=\frac{5}{11}$ como se pedía.

R/ Se necesita 1 kg de la primera aleación y 7 kg de la segunda.

983. Sea $x \rightarrow$ litros de alcohol del primer recipiente.

$30 - x \rightarrow$ litros de alcohol del segundo recipiente.

Si llenamos con agua lo que le falta al primer recipiente, la disolución tendrá por cada litro $\frac{x}{30}$ de alcohol y $1-\frac{x}{30}$ de agua. Si llenamos el segundo recipiente con la disolución que se obtuvo en el primer recipiente, en este tendremos $30-x+\frac{x}{30}\cdot x$ litros de alcohol y $(1-(x-30))\cdot x$ litros de agua. Cada litro de la nueva disolución tendrá: $\dfrac{30-x+\frac{x^2}{30}}{30}=\left(1-\frac{x}{30}-\left(\frac{x}{30}\right)^2\right)$ de alcohol.

Pasemos 12 litros de esta disolución otra vez al primer recipiente y en este obtendremos finalmente una disolución que estará compuesta por $\left\{12\left(1-\frac{x}{30}-\left(\frac{x}{30}\right)^2\right)+\frac{x}{30}(30-x)\right\}$ litros de alcohol. En el segundo recipiente quedará: $18\cdot\left(1-\frac{x}{30}-\left(\frac{x}{30}\right)^2\right)$ litros de alcohol.

Escribamos la ecuación considerando que en el segundo recipiente hay dos litros menos que en el primero:

$$18\cdot\left(1-\frac{x}{30}-\left(\frac{x}{30}\right)^2\right)+2=\left\{12\left(1-\frac{x}{30}-\left(\frac{x}{30}\right)^2\right)+\frac{x}{30}(30-x)\right\}$$

$$18\cdot\left(\frac{30^2-30x+x^2}{30^2}\right)+2=12\left(\frac{30^2-30x+x^2}{30^2}\right)+\frac{x(30-x)}{30}$$

$$18\cdot(900-30x+x^2)+2\cdot 900=12\cdot(900-30x+x^2)+30x(30-x)$$

$$6\cdot(900-30x+x^2)=900x-30x^2-1800$$

$$5400-180x+6x^2=900x-30x^2-1800$$

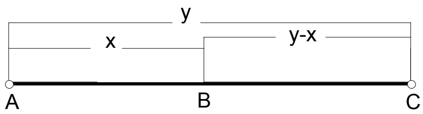
$$36x^2-1080x+7200=0$$

$$x^2-30x+200=0 \qquad x_1=20$$

$$(x-20)(x-10)=0 \qquad x_2=10$$

R/ Si en el primero hay 20 litros en el segundo hay 10 y viceversa: si hay 10 litros en el primero en el segundo hay 20.

984.



Si: $x \to$ longitud de la parte llana

$y \to$ longitud de cuesta arriba

$11{,}5-(x+y) \to$ longitud de cuesta abajo

$$\begin{cases}\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{11{,}5-(x+y)}{5}=2\dfrac{54}{60}\\[2mm] \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{5}+\dfrac{11{,}5-(x+y)}{3}=3\dfrac{6}{60}\end{cases}$$

$$\begin{cases}15x+20y+12(11{,}5-x-y=174)\\ 15x+12y+20(11{,}5-x-y=186)\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}3x+8y=36\\ 5x+8y=44\end{matrix}\right\}\Rightarrow 2x=8\Rightarrow x=4$$

$3x+8y=36$

$8y=36-12\Rightarrow y=3$

R/ La parte llana tiene 4km.

985. Sea :

$x \to$ litros por minutos que vierte la primera llave

$y \to$ litros por minutos que vierte la segunda llave

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3}\\[2mm] \dfrac{720}{x+y}=\dfrac{12}{1}\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}3x-2y\ =\ 0\\ 60\ =\ x+y\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}3x-2y\ =\ 0\\ 2x+2y\ =\ 120\end{matrix}\right\}\Rightarrow\ 5x\ =\ 120\ \Rightarrow\ x\ =\ 24$$

$x+y=60\Rightarrow y=60-24\Rightarrow y=36$

La primera vierte 24l/min y la segunda 36l/min.

986. $x \to$ velocidad del tren (inicial).

$y \to$ distancia entre A y C.

Como viaja 1 hora de A hasta B entonces $\overline{AB}=v\cdot t=x\cdot 1=x$ por tanto $\overline{BC}=y-x$. El tiempo que demora el tren de A hasta C es:

$1\,h+\dfrac{1}{2}h+\dfrac{y-x}{\frac{6}{5}x}h=\dfrac{3}{2}+\dfrac{y\text{-}x}{6x}$ $\quad(1)$. Ahora como llega con $10\min=\dfrac{1}{6}\mathrm{h}$ de atraso, también el tiempo del viaje es: $t=\dfrac{s}{v}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{6}$ $\quad(2)$. De (1) y (2) tenemos:

$$\frac{3}{2}+\frac{y\text{-}x}{6x}=\frac{y}{x}+\frac{1}{6}\Rightarrow 9x+5y\text{-}5x=6y+x\Rightarrow 3x\text{-}y=0\qquad(3)$$

Por otra parte si se hubiera detenido 12km más adelante, sabiendo que llegaría con $4\min=\dfrac{4}{60}h=\dfrac{1}{15}\mathrm{h}$ de atraso se puede plantear que:

$$1\,h+\frac{1}{2}h+\frac{12}{x}h+\frac{5(y-(x+12))}{6x}h=\frac{y}{x}+\frac{1}{15}$$

$$\frac{3}{2}+\frac{12}{x}+\frac{5y-5x-60}{6x}=\frac{y}{x}+\frac{1}{15}$$

$45x + 360 + 25y - 25x - 300 = 30y + 2x$

$13x - 5y = -60 \qquad (4)$

de (3) y (4) tenemos:

$$\begin{cases} 3x\text{-}y = 0 \\ 13x - 5y = -60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -15x + 5y = 0 \\ 13x - 5y = -60 \end{cases}$$

$-2x = -60$

$x = 30$

$3x - y = 0$

$3 \cdot 30 - y = 0$

$y = 90$

R/ La velocidad inicial del tren es de 30km/h y la distancia recorrida es de 90km.

987. *x* $\rightarrow$ el número de revoluciones por minutos de la polea mayor.
y $\rightarrow$ es el número de revoluciones por minutos de la polea menor.
Puesto que *y* da 400r/min más, es evidente que $y > x$, analizando lo planteado en el enunciado podemos escribir la ecuación:

$$\left.\begin{aligned} y - x &= 400 \\ \frac{5}{x} - \frac{5}{y} &= \frac{1}{60} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y - x &= 400 \\ \frac{5(y-x)}{xy} &= \frac{1}{60} \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{cases} (1)\ \ y - x = 400 \ \Rightarrow \ y = 400 + x \qquad (3) \\ (2)\ \ 60 \cdot 5(y - x) = xy \end{cases}$$

sustituyendo (1) en (2)

$300 \cdot 400 = xy$

$xy = 120000 \qquad (4)$

sustituyendo (3) en (4)

$x(400 + x) = 120000$

$x^2 + 400x - 120000 = 0$

$(x + 600)(x - 200) = 0$

$x_1 = -600 \ \text{ imposible}$

$x_2 = 200$

$y = 400 + 200$

$y = 600$

R/ la polea mayor efectúa 200rev/min y la menor da 600rev/min.

988. *x* $\rightarrow$ masa de la primera disolución de ácido.
y $\rightarrow$ masa de la segunda disolución de ácido.

$\frac{0,8}{x} \cdot 100 = \frac{80}{x}\%$ de ácido sulfúrico de la primera

$\frac{0,6}{y} \cdot 100 = \frac{60}{y}\%$ de ácido sulfúrico de la segunda

$x + y = 10$

$\frac{80}{x} - \frac{60}{y} = 10$

$x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x$

$8y - 6x = xy$

$8(10 - x) - 6x = x(10 - x)$

$80 - 8x - 6x = 10x - x^2$

$x^2 - 24x + 80 = 0$

$(x - 20)(x - 4) = 0$

$x_1 = 20 \ \ \text{imp. hay 10 kg de disolución}$

$x_2 = 4$

$y = 10 - x \Rightarrow y = 10 - 4 \Rightarrow y = 6$

R/ Tenemos 4kg de la primera y 6kg de la segunda.

989. Sea *x* $\rightarrow$ distancia a recorrer

$\frac{x}{3} \rightarrow$ tiempo en que recorre esa distancia a una velocidad de 3km/h.

$(x-3)\,\text{km} \to$ parte que falta después de caminar una hora.

Con la nueva velocidad, el campesino recorre la distancia que le falta en $(x-3)\,\text{h}$. Si el campesino hubiera hecho todo el recorrido manteniendo la primera velocidad, llegaría con 40min de retraso, lo que quiere decir que cuando inició el recorrido faltaban $\left(\frac{x}{3}-\frac{2}{3}\right)\text{h}$ para la salida del tren. Después de haber recorrido durante una hora, el tiempo que falta para la salida es $\left(\frac{x}{3}-\frac{5}{3}\right)\text{h}$ considerando que con la nueva velocidad el campesino llega a la estación 45 minutos antes que la salida del tren, podemos obtener la ecuación

$$\frac{x}{3}-\frac{5}{3}-\frac{x-3}{4}=\frac{3}{4} \quad /\cdot 12 \qquad\qquad 4x-20-3x+9=9$$
$$x=20$$

R/ El campesino recorrió 20 kilómetros.

990. Sea *x* $\to$ velocidad del tren de carga

x + 5 $\to$ velocidad del tren de pasajeros.

$(x+5)\cdot 14 \to$ distancia recorrida por el tren de pasajeros.

$x\cdot 15{,}5 \to$ distancia recorrida por el tren de carga.

Como el tren de pasajeros aventaja en 15km al tren de carga tenemos:

$$(x+5)\cdot 14 = x\cdot 15{,}5+15 \qquad x=\frac{55}{1{,}5} \Rightarrow x = 55\cdot\frac{2}{3}$$
$$14x+70=15{,}5x+15$$
$$1{,}5x=55 \qquad x=36\frac{2}{3}\ \text{km/h}$$

R/ La velocidad del tren de carga es de $36\frac{2}{3}$ km/h

991. s $\to$ distancia de A hasta B.

$x+2{,}5 \to$ tiempo que demora el primero de A hasta B.

$x \to$ tiempo que demora el segundo de B hasta A.

$v_1 \to$ velocidad del primero

$v_2 \to$ velocidad del segundo.

$$s=(v_1+v_2)\cdot t$$
$$s=\left(\frac{s}{x+2{,}5}+\frac{s}{x}\right)\cdot 3 \qquad x^2+2{,}5x=6x+7{,}5$$
$$x^2-3{,}5x-7{,}5=0 \qquad x+2{,}5$$
$$1=\left(\frac{1}{x+2{,}5}+\frac{1}{x}\right)\cdot 3 \qquad (x-5)(x+1{,}5)=0 \qquad 5+2{,}5$$
$$x_1=5 \qquad 7{,}5$$
$$\frac{1}{3}=\frac{x+x+2{,}5}{x(x+2{,}5)} \qquad x_2=-1{,}5 \ \text{imposible}$$

R/ El primero en 7,5 h y el segundo en 5 h.

992. Sea:

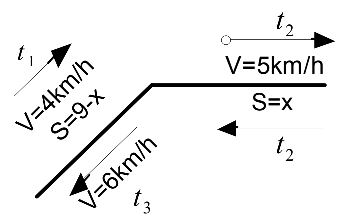
$t_1 \to$ tiempo en subida

$t_2 \to$ tiempo en llano

$t_3 \to$ tiempo en bajada

$x \to$ espacio recorrido en llano

$y \to$ espacio recorrido en loma



$$\frac{9-x}{4}+\frac{2x}{5}+\frac{9-x}{6}=3\frac{41}{60}$$

$$t_1+t_2+t_3=3\text{ h }41\text{ min}=3\frac{41}{60}\text{ h}\quad \frac{15(9-x)+24x+10(9-x)}{60}=\frac{221}{60}$$

$$135-15x+24x+90-10x=221$$

$$225-x=221\Rightarrow x=4$$

R/ La parte de la trayectoria es de 4Km.

993. x $\rightarrow$ velocidad de la lancha.

t_1 $\rightarrow$ tiempo de la lancha

t_2 $\rightarrow$ tiempo de la balsa

$13\frac{1}{3}$ $\rightarrow$ distancia a favor de la corriente.

$9\frac{1}{3}$ $\rightarrow$ distancia en contra de la corriente

4 km/h $\rightarrow$ velocidad de la corriente

$$t_1=t_2$$

$$\frac{s_1}{v_1}=\frac{s_2}{v_2}$$

$$\frac{13\frac{1}{3}}{x+4}-\frac{9\frac{1}{3}}{x-4}=\frac{13\frac{1}{3}-9\frac{1}{3}}{4}$$

$$\frac{13\frac{1}{3}(x-4)+9\frac{1}{3}(x+4)}{(x-4)(x+4)}=\frac{4}{4}$$

$$\frac{13\frac{1}{3}x-\frac{160}{3}+9\frac{1}{3}x+\frac{112}{3}}{x^2-16}=1$$

$$\frac{68x}{3}-\frac{48}{3}=x^2-16$$

$$x^2-\frac{68x}{3}=0$$

$$x\left(x-\frac{68}{3}\right)=0$$

$x_1=0$ no tiene sentido

$$x_2=\frac{68}{3}=22\frac{2}{3}\text{ km/h}$$

R/ La velocidad de la lancha es de $22\frac{2}{3}\text{ km/h}$.

994. Sea :

x $\rightarrow$ litros diarios que produce una vaca blanca

y $\rightarrow$ litros diarios que produce una vaca negra

El primer rebaño producirá $9x+7y$ litros diarios; o sea, $10\cdot(9x+7y)=90x+70y$ en 10 días.

El segundo rebaño producirá $8x+9y$ litros diarios; o sea, $8\cdot(8x+9y)=64x+72y$ en 8 días.

$$90x+70y=64x+72y$$

$$90x-64x=72y-70y$$

$$26x=2y$$

$$x=\frac{1}{13}y$$

R/ Resultan más productivas las vacas negras.

995. El gusicú tiene tres cabezas y al tener lenguas dobles, tiene seis lenguas. El trucutú tiene por tanto seis cabezas. La cantidad de cuernos es un dato innecesario.

x $\rightarrow$ cantidad de gusicú

y $\rightarrow$ cantidad de trucutú

$$x+y=25$$

$$\underline{3x+6y=90}$$

$$x+y=25$$

$$\underline{x+2y=30}$$

$$y=5$$

$$x+y=25$$

$$x=25-5$$

$$x=20$$

R/ Hay 20 gusicú.

996. Como el astronauta y su equipaje juntos pesan en la Luna 20 kilogramos, entonces juntos pesan en la Tierra 120 kilogramos y como el equipaje pesa en la Tierra 40 kilogramos, el peso del astronauta en la Tierra es $120-40=80$ kilogramos.

997. Se puede comenzar el análisis a partir de la siguiente tabla:

	Edad actual	Edad cuando el viejo tenía la edad del joven
El más joven	*x* (*x*)	$x-(y-x)[x-[(35-x)-x]]$
El más viejo	y (35-*x*)	*x* (*x*)

La edad actual del más viejo es el doble de la edad que el más joven tenía cuando el más viejo tenía la misma edad del más joven, entonces tenemos que:

$$35-x=2[x-[(35-x)-x]]$$
$$35-x=2[x-35+2x]$$
$$35-x=6x-70$$
$$7x=105$$
$$x=15$$

R/ La edad del más joven es 15 años y la del más viejo 20 años.

998. *a* $\rightarrow$ cantidad de avestruces
b $\rightarrow$ cantidad de dromedarios
c $\rightarrow$ cantidad de camellos

$$2a+4b+4c=70 \quad (1)$$
$$b+2c=23 \quad (2)$$
$$a+b+c=20 \quad (3)$$

Dividiendo por 2 a (1)

$$a+2b+2c=35 \quad (4)$$
$$a+b+c=20 \quad (3)$$

De (4) - (3)

$$b+c=15 \quad (5)$$

De (2) y (5)

$$b+2c=23$$
$$b+c=15$$
$$c=8 \quad (6)$$

De (6) y (5)

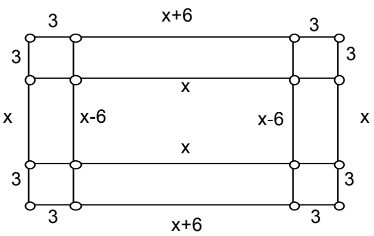
$$b+c=15$$
$$b+8=15$$
$$b=7 \quad (7)$$

De (3), (6) y (7)

$$a+b+c=20$$
$$a+7+8=20$$
$$a=5$$

R/ En el zoológico hay 5 avestruces, 7 dromedarios y 8 camellos.

999. Nos apoyaremos en la siguiente figura de análisis:



Área de la alfombra $x(x-6)$ (I)

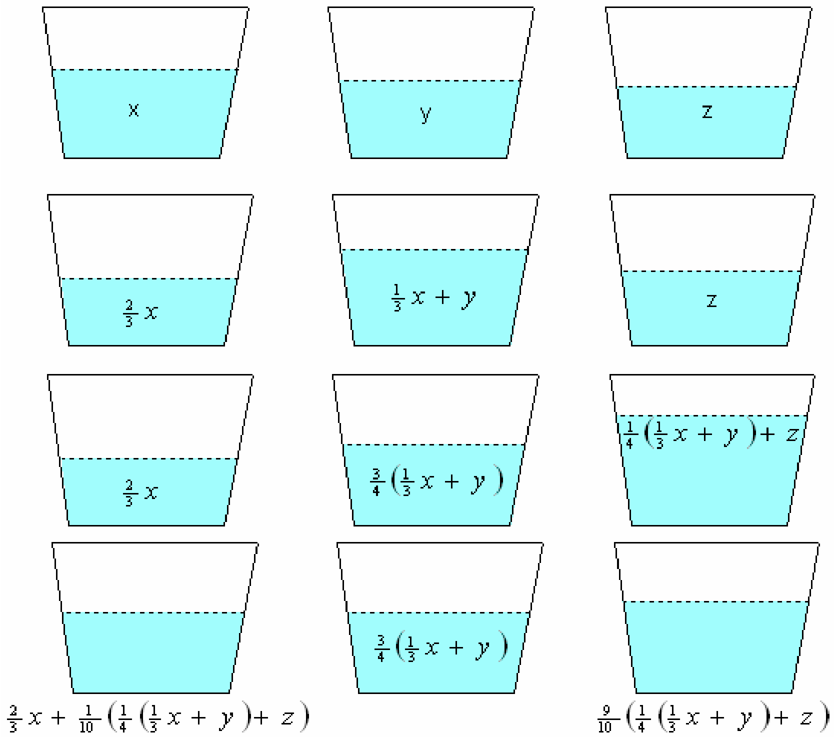
Área de la superficie descubierta: $4\cdot 3^2+2\cdot 3x+2\cdot 3(x-6)$
$=36+6x+6x-36$
$=12x$ (II)

De (I) y (II) tenemos:

$$x(x-6)=12x$$
$$x^2-18x=0$$
$$x(x-18)=0$$
$$x_1=0 \quad \text{imposible}$$
$$x_2=18$$

Luego, el área de la alfombra es: $18(18-6)=18\cdot 12=216\ \text{m}^2$ y el perímetro del salón es: $2(x+6+x)=2(2\cdot 18+6)=2\cdot 42=84\ \text{m}$

1000. *x* $\rightarrow$ cantidad de agua en el primer recipiente
y $\rightarrow$ cantidad de agua en el segundo recipiente
z $\rightarrow$ cantidad de agua en el tercer recipiente



De las condiciones del problema tenemos:

$$\frac{2x}{3} + \frac{x}{120} + \frac{y}{40} + \frac{z}{10} = 9$$

$$\frac{x}{4} + \frac{3y}{4} = 9$$

$$\frac{3x}{40} + \frac{9y}{40} + \frac{9z}{10} = 9$$

$$\frac{81x}{120} + \frac{y}{40} + \frac{z}{10} = 9$$

$$x + 3y = 36$$

$$3x + 9y + 36z = 360$$

$$81x + 3y + 12z = 1080$$

$$x + 3y = 36$$

$$x + 3y + 12z = 120$$

$$27x + y + 4z = 360 \qquad (1)$$

$$x + 3y = 36 \qquad (2)$$

$$x + 3y + 12z = 120 \qquad (3)$$

restando (3) - (2)

$$12z = 84$$

$$z = 7$$

De (1) y (3)

$$81x + 3y + 12z = 1080$$

$$-x - 3y - 12z = -120$$

$$80x = 960$$

$$x = 12 \qquad (4)$$

De (2) y (4)

$$x + 3y = 36$$

$$3y = 36 - 12$$

$$y = 8$$

R/ la primera tenía 12, la segunda 8 y la tercera 7 litros.

A NUESTROS LECTORES:

Les pedimos a todos, que una vez analizados los problemas propuestos y resueltos por ustedes comparen sus soluciones con las que proponemos y de no estar de acuerdo con ellas o tener otra vía de solución o alguna sugerencia que darnos con mucho gusto la recibiremos, pues con gran agrado tomaremos cada una de sus sugerencias o aclaraciones. Desde ahora **muchas gracias**.

Mauricio Amat Abreu

(Puerto Padre, 1959). Master en Ciencias Pedagógicas y profesor Auxiliar del Departamento de Matemática de La Universidad Pedagógica "Pepito Tey" de Las Tunas. Ha presentado varios artículos: Las inferencias lógicas: una vía para desarrollar el aprendizaje del escolar de secundaria básica. *Una alternativa metodológica para el diseño de unidades didácticas de la Matemática en la Secundaria Básica*, ¿Cómo entrenar efectivamente el ingreso a la educación superior en la asignatura Matemática?, *Algunos apuntes sobre errores en el aprendizaje de las matemáticas*, Una alternativa metodológica basada en la resolución de ejercicios para contribuir al desarrollo del pensamiento lógico de los estudiantes de Secundaria Básica a través de la Enseñanza de la Matemática, *Historia de las Matemáticas: LOS ARABES*, Procesos Lógicos del pensamiento: Razonamientos y procedimientos lógicos asociados en la unidad Geometría Plana séptimo grado. Ha participado en varios eventos nacionales e internacionales: COMPUMAT 2004, Primera Conferencia Científica Internacional Pedagogía, Patrimonio y Cultura Comunitaria 2003, *INNOED Siglo XXI 2003*, Pedagogía 1999, 2001 y 2003, RELME 16 2003, Taller sobre Recursos Didácticos y Etnomatemáticos para el aprendizaje de la Matemática 2003*, Primer taller provincial de introducción y generalización de resultados 2003*, XV FORUM de Ciencia y Técnica 2003, *Didáctica de las Ciencias 2000 y 2002*, Tercer Taller Científico sobre la formación de Habilidades Matemáticas 1997, *Seminario de perfeccionamiento para profesores 1989 y 1990*, Seminario de perfeccionamiento para profesores de PREPME, 1987.